

RADIAÇÃO ACÚSTICA DE CASCAS CILÍNDRICAS ELÍPTICAS

JORGE CLAUDIO DA SILVA PINTO

ESTA TESE FOI JULGADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE DOUTOR EM ENGENHARIA ESPECIALIDADE
ENGENHARIA MECÂNICA E APROVADA EM SUA FORMA
FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM ENGENHARIA MECÂNICA



SAMIR N.Y. GERGES, Ph. D
ORIENTADOR



PROF. ANTÔNIO FÁBIO DE CARVALHO DA SILVA
COORDENADOR DO CURSO

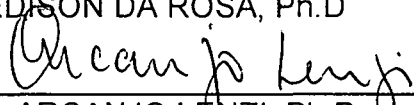
BANCA EXAMINADORA



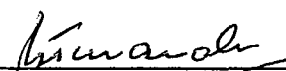
SAMIR N.Y. GERGES Ph.D



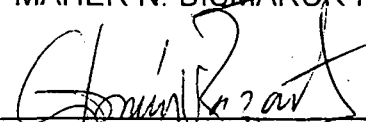
EDISON DA ROSA, Ph.D



ARCANJO LENZI, Ph.D



MAHER N. BISMARCK-NSAR, Ph.D



FERMIN S.V. BAZAN, Ph.D



SYLVIO R. BISTAFA, Ph.D

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
MECÂNICA

RADIAÇÃO ACÚSTICA DE CASCAS CILÍNDRICAS ELÍPTICAS

TESE SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA
CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM
ENGENHARIA MECÂNICA

JORGE CLAUDIO DA SILVA PINTO

FLORIANÓPOLIS , JUIHO DE 1995

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	1
1.1 - INTRODUÇÃO	1
1.2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	2
CAPÍTULO 2 - EQUAÇÕES DE MATHIEU	5
2.1 - EQUAÇÃO DA ONDA EM COORDENADAS ELÍPTICAS	5
2.2 - EQUAÇÕES DE MATHIEU	16
2.3 - FUNÇÕES DE MATHIEU PERIÓDICA	18
2.3.1 - Estudo de casos das funções periódicas	20
2.4 - FUNÇÕES DE MATHIEU RADIAL	24
2.4.1 - Primeira solução da função de Mathieu radial	25
2.4.2 - Segunda solução da função de Mathieu radial	28
2.4.3 - Soluções combinadas radiais	29
2.4.4 - Derivada da primeira solução radial	30
2.4.5 - Derivada da segunda solução radial	32
2.4.6 - Derivada da solução combinada radial	33
2.5 - RESUMO DO CAPÍTULO 2	34

CAPÍTULO 3 - EFICIÊNCIA DE RADIAÇÃO ACÚSTICA

3.0 - EFICIÊNCIA DE RADIAÇÃO	35
3.1 - ANEL ELÍPTICO	35
3.2 - CÁLCULO DA POTÊNCIA ACÚSTICA	36
3.3 - EFICIÊNCIA DE RADIAÇÃO DE UM ANEL PULSANTE	39
3.4 - EFICIÊNCIA DE RADIAÇÃO DE UM ANEL VIBRANTE	46

CAPÍTULO 4 - SOLUÇÕES PARA CASOS PARTICULARES

4.1 - MODELOS	51
4.2 - ANEL ELÍPTICO PULSANTE	52
4.3 - ANEL ELÍPTICO OSCILANTE	53
4.4 - CÁLCULO DA EFICIÊNCIA ATRAVÉS DO SOFTWARE APLICADO A FORMA MATEMÁTICA	55
4.4.1 anel elíptico pulsante	56
4.4.2 anel elíptico	56
4.5 - CÁLCULO DA EFICIÊNCIA DE RADIAÇÃO ATRAVÉS DOS SOFTWARES APLICADOS A ELEMENTOS FINITOS E ELEMENTOS DE CONTORNO	57
4.6 - CÁLCULO DA EFICIÊNCIA DE RADIAÇÃO ATRAVÉS DOS DOIS MÉTODOS DESENVOLVIDOS	60
4.7 - COMPARAÇÃO DE RESULTADOS	63

4.7.1 - Comparação entre o anel cilíndrico e o anel elíptico	64
4.7.2 - Comparação entre as tiras oscilantes	69
4.7.3 - Comparação entre tira teórica pulsante e viga teórica pulsante	71
 CAPÍTULO 5 - RESUMOS E CONCLUSÕES	 73
 REFERÊNCIAS	 77
 ANEXOS	
ANEXO 1 - COORDENADAS ELÍPTICAS	80
ANEXO 2 - FUNÇÕES PERIÓDICAS DE MATHIEU	85
ANEXO 3 - FUNÇÕES RADIAIS DE MATHIEU	87
ANEXO 4 - PROGRAMAS ANSYS 5.0 E SYSNOISE 5.0	92
ANEXO 5 - OUTROS AUTORES	104
ANEXO 6 - NÚMEROS CARACTERÍSTICOS E COEFICIENTES NORMALIZADOS	118
ANEXO 7 - CONVERGÊNCIA	123

A minha família, D.Lila, Sheila, Fernanda, Julia, Camila e
Bolivar

Este trabalho é uma continuação de um aprendizado iniciado em 1978 quando dei os primeiros passos para o vasto mundo da ciência.

Agora tenho um pouco mais de consciência de sua imensidão e o quanto ainda que terei que aprender.

Agradecer ?

- Tenho sim.

Tenho uma lista enorme de pessoas as quais eu gostaria de externar a minha gratidão e, neste instante, muitos nomes emergem, pois a cada um, com certeza, devo parte do meu trabalho.

Inicialmente devo agradecer ao meu orientador, Prof. Doutor Samir N. Y. Gerges, incansável e encorajador durante todo esse período.

A minha mulher Sheila, pelas noites de insônia, pela paciência e pelo companheirismo.

Agradeço ao Prof. Doutor Arcanjo Lenzi, e ao Prof. Doutor J. J. Espíndola, pelos ensinamentos, apoio e discussões ao longo desse longo período.

Aos amigos: Gustavo, Buba, Marcio, Murilo, Stellamaris, Beth, Carlitos, Hilton, Acir e tantos outros que participaram comigo deste aprendizado.

Agradeço especialmente à Diretoria Científica e Industrial (DIMCI) do INMETRO por ter viabilizado a minha ida para a Universidade Federal de Santa Catarina e por ter oferecido todo o apoio que foi importante durante a minha vida acadêmica.

LISTA DE SIMBOLOS

A	Área da seção transversal	
A_m	Coeficiente determinado pelas condições de contorno	
a	semi-eixo maior	
a_i	semi-eixo maior interno	
a_m	número característico de ordem par	
b	semi-eixo menor	
b_i	semi-eixo menor interno	
b_m	número característico de ordem impar	
c	velocidade do som	[m/s]
$De_{2n}^{2m}(h)$	Coeficiente de Mathieu normalizado	
DENS	Densidade	[kg/m ³]
EX	Módulo de Young	
f	frequência	[Hertz]
h	variável da função de Mathieu	
\bar{h}	$\bar{h} = \sqrt{a^2 - b^2}$, fator geométrico	
(h_1, h_2, h_3)	fatores de escala	
$H_m(h, \cosh \mu)$	Função radial combinada de Mathieu de ordem m	
$He_{2n+1}^{1,2}(h, \cosh \mu)$	Função radial combinada de Mathieu de ordem n par	
$Ho_{2n+1}^{1,2}(h, \cosh \mu)$	Função radial combinada de Mathieu de ordem n impar	
$\bar{H}_m^*(h, \cosh \mu)$	Derivada conjugada da função radial combinada de Mathieu de ordem m	

$\overline{H}_m(h, \cosh \mu)$	Derivada da Função radial combinada de Matheiu de ordem m
I	Intensidade sonora
$J_m(h, \cosh \mu)$	Primeira solução da função radial de Matheiu de ordem m
$\overline{J}_m(h, \cosh \mu)$	Derivada de primeira ordem da função radial de Matheiu de ordem m
$\overline{J}_m^*(h, \cosh \mu)$	Derivada conjugada da primeira função radial de Matheiu de ordem m
K_0	Número de onda
K_z	Número de onda estrutural
l	Comprimento do cilindro [m]
$NUXY$	coeficiente de Poisson
R_{rad}	Resistência de radiação
r	Distância do ponto P(x,y,z) á origem
r_1	Distância do ponto ao foco direito
r_2	Distância ao foco esquerdo
S	Área da superfície da fonte
$Se_m(h, \cosh \mu)$	Função periódica de Matheiu de ordem m par
$So_m(h, \cosh \mu)$	Função periódica de Mathieu de ordem m impar
$Y_m(h, \cosh \mu)$	Segunda solução da função radial de Matheiu de ordem m
$\overline{Y}_m(h, \cosh \mu)$	Derivada da segunda solução da função radial de Matheiu de ordem m
$\overline{Y}_m^*(h, \cosh \mu)$	Derivada conjugada da segunda solução radial Matheiu de ordem m

de

(u_1, u_2, u_3)	coordenadas curvilíneas	
$\langle \bar{V}^2 \rangle$	Velocidade média quadrática	
U	Comprimento periférico externo	
σ_{rad}	Eficiência de radiação	
η_{rad}	Fator de perda de radiação	
ρ	Densidade do meio	
μ	Coordenada elíptica	
θ	Coordenada hiperbólica	
$\langle w \rangle$	Potência acústica	[watt]
z	Coordenada axial	

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 INTRODUÇÃO

Quando uma estrutura vibrante está submersa em um fluido, como no caso de submarinos, navios e plataformas submarinas, o meio fluido deverá deslocar-se no sentido de acomodar o movimento de vibração da estrutura. Esse efeito de acoplamento é expresso com o conceito de eficiência de radiação e massa adicionada. Para estruturas que vibrem no vácuo os efeitos de radiação acústica e a massa adicionada são nulos.

As informações sobre a eficiência de radiação da estrutura vibrante é necessária para quantificar o acoplamento da interação fluido-estrutura [1,2,3], incluindo o efeito do amortecimento acústico e massa adicionada [4].

Este trabalho vem desenvolver o estudo de radiação sonora de cilindros elípticos de forma que a eficiência de radiação poderá ser quantificada através de seus modos radiais. O parâmetro potência de radiação dessas estruturas será estudado, em detalhe, com a solução da equação de onda acústica em coordenadas elípticas e seus coeficientes normalizados.

Comparações com os resultados obtidos por outros autores, serão realizadas para as superfícies do tipo: Tiras [5], vigas [6] e cilindros circulares [7].

Uma forma matemática fechada da eficiência de radiação sonora de cascas cilíndricas elípticas gerada através das equações de Mathieu será apresentada para vários casos particulares e comparados com os resultados obtidos pelo método de elemento contorno.

Os resultados mostram boa concordância entre a solução fechada e as soluções numéricas. Comparações com outros trabalhos [7]. [28]. [17] foram feitos levando em consideração as restrições impostas pelas soluções.

1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Morse e Ingard [8] consideraram a potência acústica radiada por uma casca cilíndrica infinita usando a pressão calculada em campo livre. Junger [1.6] calcula a resistência de radiação de casca cilíndrica infinita que vibrava somente na direção circunferencial, Robey [10] considerou a casca cilíndrica finita e apresentou resultados somente para a pressão acústica e diretividade.

Manning e Maidanik [11] apresentaram resultados para a eficiência de radiação de casca cilíndrica finita.

Yousri Gerges e Fahy [12,13] apresentaram resultados para a eficiência de radiação de uma barra cilíndrica finita com vibração axial.

Blake [6] estudou a potência de radiação devido ao movimento de uma barra vibrante na direção transversal que foi determinada modelando a barra como se fosse uma barra finita. Blake modelou também uma tira com uma seção transversal fina (comprimento muito maior que a largura) partindo da equação da onda em coordenadas elípticas.

Pinto [7] apresenta resultados para a eficiência de radiação de cascas cilíndricas finitas e infinitas, vibrando axialmente e circunferencialmente em modos simples. Os resultados foram obtidos resolvendo-se diretamente a equação da onda, em coordenadas cilíndricas, satisfazendo as condições de contorno da casca finita e infinita e os resultados para vários modos foram comparados com um modelo experimental.

Lyon [14] estudou barras amortecidas; Mainning e Maidanik [11] estudaram; cascas cilíndricas.

Jeyapalan [16] desenvolveu o cálculo para a eficiência de radiação de barra em flexão e generalizou os resultados para a eficiência de radiação de barras com seção transversal de forma variada (circular, retangular e quadrada), através da

solução da equação da onda em coordenadas elípticas e os resultados foram apresentados se utilizando o conceito de razão de aspecto para se obter o fator de perda de radiação.

Chen [30] desenvolveu uma análise para as autovetores e autovalores no sentido de se obter resultados para os modos de vibração e fenômenos quânticos de uma membrana elíptica.

O seu trabalho concentra bastante informações na área da mecânica quântica quando é enunciado que para os autos valores de energia, ha uma distribuição de nuvem de elétrons onde o fenômeno modos da galeria dos sussurros se manifesta, fato primeiramente demonstrado por Rayleigh [32] em 1910 quando estudava fenômenos acústicos utilizando a teoria de raios acústicos para compor o procedimento das reflexões na catedral de "St. Paul".

Partindo dos trabalhos de Hettich [31], Chen estimou de forma explicita as autovetores e os autovalores dos modos de vibração e os fenômenos quânticos, sem contudo usar o método de elementos finitos e/ou elementos de contorno para verificar os seus resultados. O cálculo foi realizado através das funções de Matheiu modificada gerando um conjunto que representa o produto normalizado das funções.

Partindo de um sistema de coordenadas elípticas e impondo as condições de contorno de Dirichlet, foi possível escrever as equações de Matheiu e suas soluções através de um produto de funções truncadas e normalizadas usando para isso constantes de proporcionalidades.

Chen [30] determinou o cálculo numérico das funções de Matheiu usados pela forma de recorrência partindo do problema da matrix de autovalores truncada, no campo finito, pelo produto das séries das funções de Bessel.

Vários modos de vibrações foram plotados para as altas frequências e demonstrando principalmente a existência dos modos da galeria dos sussurros.

Este trabalho terá como objetivo, o desenvolvimento de um modelo matemático para se determinar os fenômenos de radiação acústica através dos parâmetros: pressão acústica, eficiência de radiação e resistência de radiação, de uma fonte de geometria elíptica, para um meio externo partindo da solução da equação da onda em coordenadas elípticas para se determinar a radiação de anéis elípticos com extensão para cilindros elípticos infinitos e, para isso será

desenvolvido o algoritmo a partir das equações de Mathieu, suas convergências e normalizações.

Fará parte também deste trabalho:

- 1 - A comparação dos resultados entre os resultados teóricos e os resultados obtidos se utilizando a técnica do método de elemento finito (gerar as malhas modelos no intuito de se obter os modos de vibrações e frequências de cada modo), em conjunto com o método de elementos de contorno (utilizando os parâmetros gerados pela malha modelo se poderá obter a potência de radiação e eficiência de radiação para cada modo) escolhendo, ao mesmo tempo, o tipo de material e suas propriedades, que compõe a anel elíptico.
- 2 - Os resultados encontrados, de forma fechada, serão comparados com os resultados obtidos por outros autores, que trabalharam na determinação da eficiência de radiação de tiras, barras e anéis cilíndricos.

CAPÍTULO 2

2.0 EQUAÇÕES DE MATHIEU

2.1 EQUAÇÃO DA ONDA EM COORDENADAS ELÍPTICAS

O parâmetro potência acústica radiada por uma fonte sonora pode ser determinado calculando-se a pressão acústica na superfície vibrante da fonte a partir da equação da onda em um sistema de coordenadas apropriado.

A obtenção da potência, média no tempo, radiada pela fonte, é obtida pela integração do produto da pressão acústica pela velocidade superficial normal sobre a superfície da estrutura e, requer que a solução da equação da onda satisfaça às duas condições de contorno apresentadas a seguir:

- 1 - Igualdade da velocidade da partícula do fluido do meio em contato com a casca, com a velocidade superficial normal.
- 2 - Somente as ondas que deixam a superfície devem ser utilizadas para satisfazer a condição de radiação no infinito, em condição de campo livre.

A equação da pressão acústica [8] em coordenadas retangulares é dada sob a forma:

$$\nabla^2 P(x, y, z) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P(x, y, z)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1.1)$$

onde:

$P(x,y,z)$ é a pressão acústica em coordenadas retangulares (x,y,z) .

c é a Velocidade do som.

$\nabla^2 P(x,y,z)$ é o operador de Laplace, conforme mostrado abaixo.

$$\nabla^2 P(x,y,z) = \frac{\partial^2 P(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P(x,y,z)}{\partial z^2}$$

A expressão (2.1.1) será demonstrada em coordenadas elípticas da mesma forma didática que foi apresentada por vários autores, cada um utilizando símbolos diferentes para as variáveis.

A figura (2.1) é a representação geométrica utilizada para o cilindro elíptico (3D) e a figura (2.2) representa os parâmetros geométricos (2D), que serão utilizados.

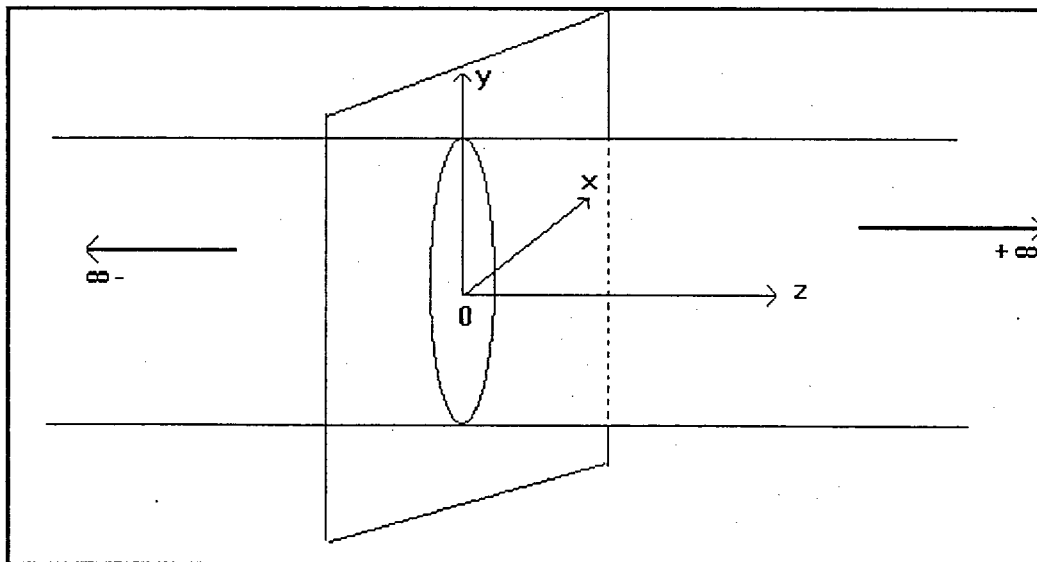


Figura 2.1 Representação geométrica do cilindro elíptico infinito.

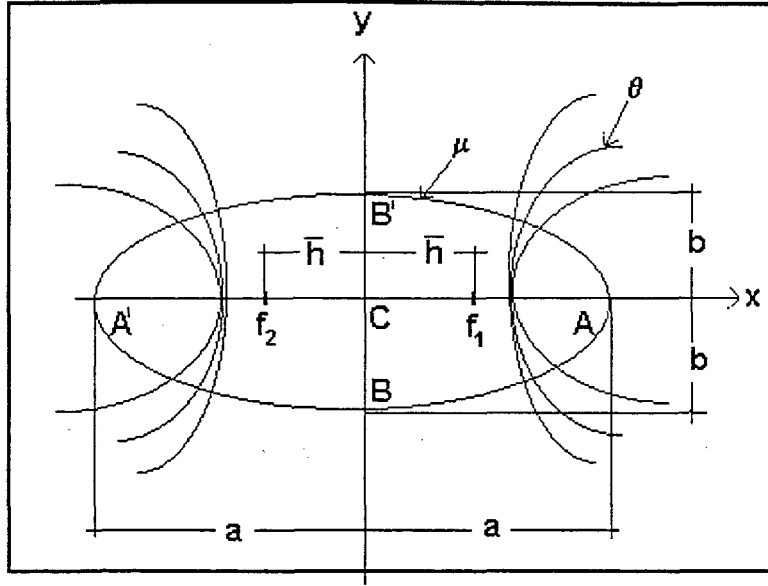


Figura 2.2: Representação dos parâmetros do plano da seção transversal do cilindro elíptico (2D).

A equação da pressão acústica (2.1.1) em coordenadas elípticas foi apresentada por Feshbach [8], Blake [6], McLachlan [18], Jeyapalan [16], Chen [30] partindo da representação geométrica visto na figura 2.1 e pode ser escrita na forma:

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} \right) \frac{1}{h^2 (\cosh 2\mu + \cos 2\theta)} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1.2)$$

onde:

$P = P(\mu, \theta, z, t)$ é a pressão acústica em coordenadas elípticas

$$h = \bar{h} \sqrt{k_0^2 - k_z^2}$$

k_0 é o número de onda acústica

$$k_0 = \frac{\omega}{c}$$

ω é a frequência em ciclos/segundo

k_z é o número de onda axial

$$k_z = \frac{\pi s}{l}$$

s é o numero de modo axial

l é o comprimento do cilindro elíptico

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} \quad \text{é o gradiente da pressão acústica na superfície}$$

μ é a coordenada elíptica

θ é a coordenada hiperbólica

z é a coordenada axial

Fazendo a função $\Psi(\mu, \theta, z, t)$ em (2.1.2) variar harmonicamente com o tempo t, tem-se:

$$P(\mu, \theta, z, t) = P(\mu, \theta, z) e^{-i\omega t} \quad (2.1.3)$$

A derivada parcial de segunda ordem de (2.1.3) em relação ao tempo é:

$$\frac{\partial^2 P(\mu, \theta, z, t)}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} P(\mu, \theta, z) e^{-i\omega t} \quad (2.1.4)$$

Substituindo (2.1.4) em (2.1.2), obtém-se a equação denominada de equação de Helmholtz em coordenadas elípticas:

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial \mu^2} \right) \frac{1}{h^2 (\cosh^2 \mu + \cos^2 \theta)} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k_0^2 p = 0 \quad (2.1.5)$$

A expressão para a pressão sonora contida na equação de Helmholtz em (2.1.5) pode ter a separação de variáveis [8] expressa sob a forma:

$$P(\mu, \theta, z) = P(\mu, \theta) \cdot P(z) \quad (2.1.6)$$

Usando a transformada de Fourier e a sua inversa aplicadas para a pressão acústica tem-se [35]:

$$\bar{P}(\mu, \theta, k) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\mu, \theta, z) e^{-i.k.z} dz \quad (2.1.7)$$

$$P(\mu, \theta, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{P}(\mu, \theta, k) e^{ikz} dk$$

A derivada de segunda ordem em relação a coordenada z da expressão (2.1.5) fica:

$$\frac{\partial^2 P(\mu, \theta, z)}{\partial z^2} = -k_z^2 P(\mu, \theta, z) \quad (2.1.8)$$

Aplicando a transformada de Fourier, (2.1.7) na expressão (2.1.5) tem-se:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 P(\mu, \theta, z)}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 P(\mu, \theta, z)}{\partial \theta^2} \right) \frac{1}{h^2 (\cosh 2\mu - \cos 2\theta)} e^{-ikz} dz \quad (2.1.9)$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 P(\mu, \theta, z)}{\partial z^2} e^{-ikz} dz + \int_{-\infty}^{+\infty} k_0^2 P(\mu, \theta, z) e^{-ikz} dz = 0$$

O que se pode observar é que na expressão (2.1.9) estão contidas as expressões (2.1.4) e (2.1.8). A expressão (2.1.9), anterior, contém as definições de integração de Fourier e, portanto, pode ser reescrita na forma:

$$\left(\frac{\partial^2 \bar{P}(\mu, \theta, k)}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 \bar{P}(\mu, \theta, k)}{\partial \theta^2} \right) \frac{1}{h^2 (\cosh 2\mu - \cos 2\theta)} +$$

$$(k_0^2 - k_z^2) \bar{P}(\mu, \theta, k) = 0 \quad (2.1.10)$$

A solução para a expressão (2.1.10) proposta por Feshbach [17] pode ser apresentada sob a forma:

$$\bar{P}(\mu, \theta, k) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m H_m(h, \cosh \mu) \text{Se}_m(h, \sin \theta) \quad (2.1.11)$$

onde $h = \sqrt{k_0^2 - k_z^2}^{\frac{1}{2}}$

Finalmente, substituindo (2.1.11) em (2.1.7) tem-se como solução:

$$P(\mu, \theta, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_m H_m(h, \cosh \mu) \text{Se}_m(h, \sin \theta) e^{ikz} dk \quad (2.1.12 a)$$

Em (2.1.12) estão envolvidas várias funções que são definidas abaixo.

$\text{Se}_m(h, \cos \theta)$ é a função seno elíptico sendo a primeira função de Mathieu periódica de ordem m

$H_m(h, \cos \mu)$ é a função radial combinada de Mathieu de ordem m onde;

$$H_m(h, \cosh \mu) = J_m(h, \cosh \mu) + iY_m(h, \cosh \mu)$$

$J_m(h \cosh \mu)$ é a primeira solução da função radial de Mathieu de ordem m

$Y_m(h \cosh \mu)$ é a segunda solução da função radial de Mathieu de ordem m

A_m é uma função geral de k_z^2 e $k^2 = k_0^2 - k_z^2$.

Substituindo (2.1.12) em (2.1.3) tem-se como solução:

$$(\mu, \theta, z, t) = \frac{e^{-i\omega t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{\infty} A_m H_m(h \cosh \mu) S_m(h \sinh \theta) \right] e^{ikz} dk \quad (2.1.12 b)$$

A expressão (2.1.12 b) corresponde a pressão acústica gerada em coordenadas elípticas.

A partir de (2.1.12) é possível obter outros parâmetros, tais como, a potência acústica radiada ou a eficiência de radiação.

A expressão (2.2.12) contém o valor de A_m (onde m representa os m modos harmônicos de vibração) que será obtido aplicando as condições de contorno.

Aplicando a primeira condição de contorno tem-se igualdade entre a velocidade de partícula do fluido (em contato com o cilindro elíptico) e a velocidade superficial normal.

$$V_N|_{\mu=\mu_0} = -\frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial P}{\partial \mu}|_{\mu=\mu_0} \quad (2.1.13)$$

ω é a frequência em ciclos por segundo

ρ é a densidade do meio

A velocidade superficial normal a superfície da elipse será apresentada sob a forma:

$$V_N = V_0 \sin(m\theta) \sin(k_z z). e^{-i.\omega.t} \quad (2.1.14)$$

V_0 é uma constante real representando a amplitude da velocidade.

Determinando a derivada da função (2.1.12b) tem-se:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \mu} \right|_{\mu=\mu_0} = \frac{1}{2\pi} e^{-i.\omega.t} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_m h. \bar{H}_m(h. \cosh \mu_0) Se_m(h. \cos \theta) e^{ikz} dk$$

Substituindo essa derivada no segundo membro de (2.1.13) e finalmente igualando as expressões (2.1.13) e (2.1.14) obtém-se:

$$\frac{e^{-i\omega t}}{2\pi\omega\rho} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_m h. \bar{H}_m(h. \cosh \mu_0) Se_m(h. \cos \theta) e^{ikz} dk = V_0 \sin(m\theta) \sin(k_z z) \quad (2.1.15)$$

Em (2.1.15) define-se:

$\bar{H}(h. \cosh \mu_0)$ é a derivada da função radial combinada de Mathieu de ordem m calculada em $\mu = \mu_0$.

Retornando à expressão em (2.1.15) e multiplicando ambos os lados da expressão por $Se_n(h, \cos \theta)$ e aplicando a integral ao longo de um período, obtém-se:

$$\begin{aligned}
2\pi i \omega \rho \int_0^{2\pi} V_0 \operatorname{sen}(k_z z) \operatorname{sen}(m\theta) \operatorname{Se}_m(h, \cosh \theta) d\theta = \\
\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} A_m h \bar{H}_m(h, \cosh \mu) \operatorname{Se}_m(h, \cos \theta) \cdot \operatorname{Se}_n(h, \cos \theta) e^{ikz} d\theta dz
\end{aligned} \quad (2.1.16)$$

onde:

$\operatorname{Se}_n(h, \cos \theta)$ é a função seno elíptico sendo a função de Mathieu periódica de ordem n .

Aplicando a propriedade de ortogonalidade da função seno elíptico em (2.1.16), quando $m \neq n$ a integral será zero e, para $m = n \neq 0$, ter-se-á sucessivamente:

$$\begin{aligned}
2\pi i \omega \rho \int_0^{2\pi} V_0 \operatorname{sen}(k_z z) \operatorname{se}(m\theta) \operatorname{Se}_n(h, \cos \theta) d\theta = \\
\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} A_m h \bar{H}_m(h, \cosh \mu_0) \operatorname{Se}_m(h, \cos \theta) \operatorname{Se}_n(h, \cos \theta) e^{ikz} d\theta dz
\end{aligned} \quad (2.1.16a)$$

$$\begin{aligned}
2\pi i \omega \rho V_0 \operatorname{sen}(k_z z) \int_0^{2\pi} \operatorname{se}(m\theta) \operatorname{Se}_n(h, \cos \theta) d\theta = \\
\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} A_m h \bar{H}_m(h, \cosh \mu_0) \operatorname{Se}_m(h, \cos \theta) \operatorname{Se}_n(h, \cos \theta) e^{ikz} dk d\theta
\end{aligned} \quad (2.1.16b)$$

$$\begin{aligned}
2\pi i \omega \rho V_0 \operatorname{sen}(k_z z) \int_0^{2\pi} \operatorname{se}(m\theta) \operatorname{Se}_n(h, \cos \theta) d\theta = \\
\int_0^{2\pi} \operatorname{Se}_m(h, \cos \theta) \operatorname{Se}_n(h, \cos \theta) d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} A_m h \bar{H}_m(h, \cosh \mu_0) e^{ikz} dk
\end{aligned} \quad (2.1.16c)$$

$$A_m h \bar{H}_m(h \cosh \mu_0) = 2\pi i \omega \rho V_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(k_z z) e^{-ikz} dk \frac{\int_0^{2\pi} \sin(m\theta) \text{Se}_n(h \cos \theta) d\theta}{\int_0^{2\pi} \text{Se}_m(h \cos \theta) \text{Se}_n(h \cos \theta) d\theta} \quad (2.1.16d)$$

Substituindo em (2.1.16d) a relação $\sin(k_z z) = \frac{e^{ik_z z} - e^{-ik_z z}}{2i}$ tem-se:

$$\begin{aligned} A_m h \cosh \mu_0 \bar{H}_m(h \cosh \mu_0) &= \\ &= 2\pi i \omega \rho V_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(k-k_z)z} dz - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(k+k_z)z} dz \frac{\int_0^{2\pi} \sin(m\theta) \text{Se}_n(h \cos \theta) d\theta}{\int_0^{2\pi} \text{Se}_m(h \cos \theta) \text{Se}_n(h \cos \theta) d\theta} \end{aligned} \quad (2.1.16e)$$

$$A_m h \bar{H}_m(h \cosh \mu_0) = \pi i \omega \rho V_0 [\delta(k - k_z) - \delta(k + k_z)] \frac{\int_0^{2\pi} \sin(m\theta) \text{Se}_n(h \cos \theta) d\theta}{\int_0^{2\pi} \text{Se}_m(h \cos \theta) \text{Se}_n(h \cos \theta) d\theta} \quad (2.1.16f)$$

δ é a função impulso de Dirac.

Da expressão (2.1.16f) pode-se obter, finalmente, o valor da constante A_m , na forma:

$$A_m = i\pi \omega V_0 [\delta(\bar{k} + k_z) - \delta(\bar{k} - k_z)] \frac{\int_0^{2\pi} \sin(m\theta) \text{Se}_n(h \cos \theta) d\theta}{\int_0^{2\pi} \text{Se}_m(h \cos \theta) \text{Se}_n(h \cos \theta) d\theta} \frac{1}{h \bar{H}_m(h \cosh \mu)} \quad (2.1.17)$$

Rescrevendo a equação geral para a pressão acústica em coordenadas elípticas, segundo Feshbach [17], obtém-se:

$$\begin{aligned}
 p(\mu, \theta, z, t) = & \frac{\omega \rho V_0 e^{-i\omega t}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [\delta(\bar{k} - k_z) - \delta(\bar{k} - k_z)] \frac{H_m(h, \cosh \mu)}{h \bar{H}_m(h, \cosh \mu_0)} \\
 & \frac{\int_0^{2\pi} \sin(m\theta) \text{Se}_n(h, \cos \theta) d\theta}{\int_0^{2\pi} \text{Se}_m(h, \cos \theta) \text{Se}_n(h, \cos \theta) d\theta} \text{Se}_m(h, \cos \theta) e^{ikz} dk \\
 P(\mu, \theta, z, t) = & \frac{\omega \rho V_0 e^{-i\omega t}}{2} \left[\frac{H_m(h, \cosh \mu) e^{-ikz}}{h \bar{H}_m(h, \cosh \mu_0)} - \frac{H_m(h, \cosh \mu) e^{ikz}}{h \bar{H}_m(h, \cosh \mu_0)} \right] \\
 & \frac{\int_0^{2\pi} \sin(m\theta) \text{Se}_n(h, \cos \theta) d\theta}{\int_0^{2\pi} \text{Se}_n(h, \cos \theta) \text{Se}_m(h, \cos \theta) d\theta} \text{Se}_m(h, \cos \theta)
 \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

ou

$$\begin{aligned}
 p(\mu, \theta, z, t) = & e^{-i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} i\omega \rho V_0 \cdot \sin(k_z z) \cdot \frac{\int_0^{2\pi} \sin \theta \text{Se}_n(h, \cos \theta) d\theta}{\int_0^{2\pi} \text{Se}_m(h, \cos \theta) \text{Se}_n(h, \cos \theta) d\theta} \\
 & \frac{H_m(h, \cosh \mu)}{h \bar{H}_m(h, \cosh \mu_0)} \text{Se}_m(h, \cos \theta)
 \end{aligned} \tag{2.1.19}$$

A expressão matemática (2.1.19) fornece de forma fechada a pressão acústica.

Para que se possa obter uma solução para a equação de onda em coordenadas elípticas (2.1.10), tendo a pressão acústica como parâmetro, é necessário desenvolver uma expressão de forma fechada cuja solução seja

um conjunto de funções denominadas de equações de Mathieu como é apresentado na expressão (2.1.19).

2.2 EQUAÇÕES DE MATHIEU

O estudo das equações de Mathieu será apresentado neste item utilizando as expressões obtidas anteriormente.

A equação de **Helmholtz** apresentada anteriormente, em coordenadas elípticas, (2.1.10) pode ser reescrita sob a forma:

$$\left(\frac{\partial^2 \bar{P}(\mu, \theta, z)}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 \bar{P}(\mu, \theta, z)}{\partial \theta^2} \right) \frac{1}{h^2 (\cosh 2\mu - \cos 2\theta)} + (k_0^2 - k_z^2) \bar{P}(\mu, \theta, z) = 0 \quad (2.2.1)$$

A expressão (2.2.1) obtida para três (3) dimensões (3D) pode ser reescrita para duas (2) dimensões (2D), isto é, não considerando a variação da pressão ao longo do eixo z, a nova equação restringe-se a forma:

$$\frac{\partial^2 P(\mu, \theta)}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 P(\mu, \theta)}{\partial \theta^2} + h^2 [\cosh^2 \mu - \sin^2 \theta] P(\mu, \theta) = 0 \quad (2.2.2)$$

Aplicando o método da separação de variáveis para a solução da pressão na expressão (2.2.2) sob a forma:

$$P(\mu, \theta) = P_1(\mu) P_2(\theta) \quad (2.2.3)$$

Essa separação de variáveis leva a expressão (2.2.2) ficar sob a forma:

$$P_1(\theta) \frac{d^2 P_2(\mu)}{d\mu^2} + P_2(\mu) \frac{d^2 P_1(\theta)}{d\theta^2} + h^2 (\cosh 2\mu - \cos 2\theta) P_2(\mu) P_1(\theta) = 0 \quad (2.2.4)$$

Dividindo a expressão (2.2.4) pelo segundo membro de (2.2.3) tem-se:

$$\frac{1}{P_2(\mu)} \frac{d^2 P_2(\mu)}{d\mu^2} + h^2 \cosh 2\mu = \frac{1}{P_1(\theta)} \frac{d^2 P_1(\theta)}{d\theta^2} h^2 \cos 2\theta \quad (2.2.5)$$

As duas equações contidas em (2.2.5) podem ser igualadas a uma constante, como é sugerido por Feshbach [17], obtendo-se portanto, um par de equações sob a forma:

$$\frac{d^2 P_2(\mu)}{d\mu^2} - (d - h^2 \cosh 2\mu) P_2(\mu) = 0 \quad (2.2.6)$$

$$\frac{d^2 P_1(\theta)}{d\theta^2} + (d - h^2 \cos \theta) P_1(\theta) = 0 \quad (2.2.7)$$

As equações (2.2.6) e (2.2.7) são as formas canônicas das equações de Mathieu.

Para que as equações (2.2.6) e (2.2.7), tenham soluções é necessário obedecer às seguintes condições:

Se $Y = \cos \theta$, é uma variável independente, deve-se usar a faixa de variação entre $-1 \leq Y \leq 1$ para a coordenada θ , enquanto que $0 \leq Y \leq \infty$ será usada para a coordenada μ .

Considerando as propriedades da matemática geral, as soluções devem ser obtidas usando as variáveis sob a forma:

$$Y = \cos \theta = \frac{1}{a}(r_2 - r_1) \dots \dots \dots -1 \leq Y \leq 1$$

Quando a linha de contorno é uma elipse ($\mu = \text{constante}$), então a variável θ pode variar de 0 até 2π gerando, portanto, uma função periódica.

Os valores de θ ocorrem somente para valores discretos do parâmetro d .

Os valores discretos resultam em um conjunto de autofunções chamadas de funções de Mathieu que deverão ser geradas através do método das frações contínuas (vide Anexo V).

A forma canônica da equação de Mathieu foi obtida por Mathieu como solução do problema para uma membrana elíptica. Similarmente a equação diferencial (2.2.7) para a pressão sonora em coordenadas elípticas tem a mesma forma da equação diferencial encontrada por Mathieu e, por conseguinte, ela toma diferentes formas de acordo com os valores dos parâmetros d e h encontrados nas duas equações diferenciais.

Ince[21] através do trabalho; “Researches into Characteristic Numbers of the Mathieu Equation” estabeleceu os valores do parâmetro d quando o valor de h é conhecido. A equação (2.2.7) será periódica e a função de Mathieu pode ser desenvolvida como uma Série de Fourier convergente para valores de h pequeno ($h < 1.8$) e sua solução será um conjunto de 4(quatro) funções soluções.

2.3 FUNÇÕES DE MATHIEU PERIÓDICAS

A partir da primeira equação obtida (2.2.7) é desenvolvido um estudo sobre as soluções dessa equação que Ince [21] apresenta em uma coletânea de trabalhos [22], [23], [24], [25].

A equação (2.2.7) será reescrita sob a forma:

$$\frac{d^2 P_1(h, \theta)}{d\theta^2} + (d - h^2 \cos \theta) P_1(h, \theta) = 0 \quad (2.3.1)$$

d é o número característico

$d = a_m(h)$ para os números característicos pares

$d = b_m(h)$ para os números característicos ímpares.

$$h = \bar{h}.k_0$$

Segundo Ince [21], a solução para a função periódica de Mathieu é um conjunto de soluções formadas por uma série senoidal ou cossenoidal cujos coeficientes normalizados foram determinados pelo autor a partir da série de Fourier.

Esse conjunto de soluções são denominados de senos elípticos ou cossenos elípticos e seus valores são apresentados pelos autores.

Assim a solução periódica para (2.3.1) pode ser representada como um conjunto de quatro (4) soluções da série de Fourier obtidos por Ince [21] e por Barakat [26] na forma:

$$1) \text{ Ce}_{2m}(h, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{De}_{2n}^{2m}(h) \text{Cos}(2n\theta) \quad \text{período } \pi$$

$$2) \text{ Co}_{2m+1}(h, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{De}_{2n+1}^{2m+1}(h) \cos(2n+1)\theta \quad \text{período } 2\pi$$

$$3) \text{ Se}_{2m}(h, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{Do}_{2n}^{2m}(h) \text{sen}2n\theta \quad \text{período } \pi$$

$$4) \text{ So}_{2m+1}(h, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{Do}_{2n+1}^{2m+1}(h) \text{sen}(2n+1)\theta \quad \text{período } 2\pi$$

(2.3.2)

$\text{De}_{2n+p}^{2m+p}(h)$ São os coeficientes normalizados da função período de Mathieu de ordem $p\{0,1\}$.

A obtenção das quatro soluções em (2.3.2) requer um estudo detalhado sobre as frações contínuas (Anexo VI).

A partir da normalização dos coeficientes e respectivos números característico se obtém os valores mais prováveis para cada função.

Os coeficientes D que farão parte da expansão das funções de Mathieu podem ser obtidos, via método Bickley-McLachlan [18] ou Barakat [26], para pequenos valores de h ($h \leq 1.8$) pois a série de potência não é convergente [vide Anexo VI] para todos os valores mas, para um raio finito de convergência.

O raio finito de convergência nunca foi determinado com exatidão porém McLachlan estabeleceu que “a série aparenta uma convergência quando $(\frac{h^2}{4})$ for pequeno mas diverge quando esse valor é grande”. O estudo fornecido pela National Bureau of Standards (N.B.S.) e por outros autores tem validade na estabilidade e convergência quando se utiliza os valores para h na faixa de $0 \leq h \leq 1.8$.

Barakat [26] obteve uma expressão para os coeficientes normalizados, expandindo-os em uma série de potência e aplicando-os às funções de Mathieu.

A série seno elíptico de ordem zero é, portanto, o desenvolvimento da função periódica de Mathieu para $m=0$.

A expressão se torna uma função de Fourier cujos coeficientes são normalizados.

2.3.1 Estudo de casos das funções periódicas.

Como exemplo, serão apresentados alguns casos apresentados por Ince [21] e Barakat [26].

1) Seno elíptico par de ordem zero

Retornando a expressão (1) em (2.3.1) e par de ordem zero e pode ser escrita sob a forma:

$$Se_0(h, \theta) = De_0^0(h) + De_2^0(h) \cos 2\theta + De_4^0(h) \cos 4\theta + \dots \quad (2.3.3)$$

A expansão (2.3.3) terá os coeficientes normalizados sob a forma:

$$De_0^0(h) = 1 + \frac{h^2}{8} + \frac{7h^4}{512} + \frac{23h^6}{36864} - \frac{697h^8}{18874368}$$

$$De_2^0(h) = -\frac{h^2}{8} - \frac{h^4}{64} - \frac{7h^6}{8192} + \frac{17h^8}{589824}$$

$$De_4^0(h) = \frac{h^4}{512} + \frac{h^6}{4096} + \frac{232h^8}{2359296}$$

$$De_6^0(h) = -\frac{h^6}{73728} - \frac{h^8}{589824}$$

$$De_8^0(h) = \frac{h^8}{18874368}$$

2) Seno elíptico par de primeira ordem

Para a equação de Mathieu par de primeira ordem tem-se a série:

$$Se_1(h, \theta) = De_1^1(h) \cos \theta + De_3^1(h) \cos 3\theta + De_5^1(h) \cos 5\theta + De_7^1(h) \cos 7\theta + \dots$$

(2.3.4)

Tomando os coeficientes abaixo;

$$De_1^1(h) = 1 + \frac{h^2}{32} + \frac{5h^4}{3072} + \frac{41h^6}{589824} + \frac{91h^8}{47185920} + \dots$$

$$De_3^1(h) = -\frac{h^2}{32} - \frac{h^4}{512} - \frac{3h^6}{32768} - \frac{55h^8}{18874368} - \dots$$

$$De_5^1(h) = \frac{h^4}{3072} + \frac{7h^6}{294912} + \frac{7h^8}{6291456} + \dots$$

$$De_7^1(h) = -\frac{h^6}{589824} - \frac{5h^8}{37748736} - \dots$$

$$De_9^1(h) = \frac{h^8}{188743680}$$

3) Seno elíptico par de segunda ordem.

Para a equação de Mathieu par segunda ordem pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \text{Se}_2(h, \theta) = & \text{De}_2^0(h) + \text{De}_2^2(h) \cos 2\theta + \text{De}_4^2(h) \cos 4\theta + \text{De}_6^2(h) \cos 6\theta + \\ & + \text{De}_8^2(h) \cos 8\theta + \dots \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Coefficientes normalizados

$$\begin{aligned} \text{De}_0^2(h) &= \frac{h^2}{16} - \frac{h^4}{384} - \frac{91h^6}{294912} + \frac{493h^8}{11796480} + \dots \\ \text{De}_2^2(h) &= 1 - \frac{h^2}{24} + \frac{29h^4}{18432} + \frac{293h^6}{737280} - \frac{61733h^8}{1698693120} + \dots \\ \text{De}_4^2(h) &= -\frac{h^2}{48} + \frac{h^4}{1152} - \frac{h^6}{12288} - \frac{83h^8}{13271040} + \dots \\ \text{De}_6^2(h) &= -\frac{h^6}{147456} + \frac{73h^8}{94371840} \dots \\ \text{De}_8^2(h) &= -\frac{h^6}{1474560} + \frac{h^8}{3538440} + \dots \\ \text{De}_{10}^2(h) &= \frac{h^8}{566231040} + \dots \end{aligned}$$

4) Seno elíptico impar de ordem zero.

Utilizando o mesmo método, pode-se obter a equação de Mathieu impar de ordem zero.

$$\begin{aligned} \text{So}_1(h, \theta) = & \text{Do}_1^1(h) \sin \theta + \text{Do}_3^1(h) \sin 3\theta + \text{Do}_5^1(h) \sin 5\theta + \text{Do}_7^1(h) \sin 7\theta + \\ & + \text{Do}_9^1(h) \sin 9\theta \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Coeficientes normalizados

$$\text{Do}_1^1(h) = 1 + \frac{3h^2}{32} + \frac{13h^4}{3072} + \frac{47h^6}{589824} + \frac{7h^8}{37748736} + \dots$$

$$\text{Do}_3^1(h) = -\frac{h^2}{32} - \frac{h^4}{512} - \frac{5h^6}{98304} - \frac{h^8}{2097152} - \dots$$

$$\text{Do}_5^1(h) = \frac{h^4}{3072} + \frac{5h^6}{294912} + \frac{5h^8}{18874368} + \dots$$

$$\text{Ao}_7^1(h) = -\frac{h^6}{589824} - \frac{h^8}{12582912} - \dots$$

$$\text{De}_9^1(h) = \frac{h^8}{18874368} + \dots$$

5) Seno elíptico impar de primeira ordem

Equação de Mathieu impar de primeira ordem:

$$\text{So}_{2,2}(h, \theta) = \text{Do}_2^2(h) \sin 2\theta + \text{Do}_4^2(h) \sin 4\theta + \text{Do}_6^2(h) \sin 6\theta + \text{Do}_8^2(h) \sin 8\theta$$

(2.3.7)

Coeficientes normalizados

$$Do_2^2(h) = \frac{1}{2} + \frac{h^2}{48} + \frac{23h^4}{36864} + \frac{17h^6}{1474560} + \frac{30h^8}{3397386240} +$$

$$Do_4^2(h) = \frac{h^2}{96} + \frac{h^4}{2304} + \frac{3h^6}{294912} + \frac{13h^8}{106168320} +$$

$$Do_6^2(h) = \frac{h^4}{12288} + \frac{h^6}{294912} + \frac{13h^8}{188743680} +$$

$$Do_8^2(h) = -\frac{h^6}{2949120} + \frac{h^8}{70778880} +$$

$$Do_{10}^2(h) = \frac{h^8}{1132462080} + \dots$$

A expansão desses coeficientes foram derivados de Bickley e listados no NATIONAL BUREAU OF STANDARDS TABLES

Os valores numéricos e respectivos gráficos para as expressões desde (1) até (5) serão apresentados no ANEXO II.

2.4 FUNÇÃO DE MATHIEU RADIAL

A partir da expressão (2.3.6) que representa a segunda solução da função de Mathieu obtida é desenvolvido um estudo sobre as soluções dessa equação apresentada por Barakat [26] e Mclachlan [18] na seguinte forma.

$$\frac{d^2 P(h, \mu)}{d\mu^2} + (d - h^2 \cosh 2\mu) P(h, \mu) = 0 \quad (2.4.1)$$

d é o número característico

$$h = \bar{h} \cdot \sqrt{k_0^2 - k_z^2}$$

A expressão (2.4.1) é denominada de função de Mathieu radial e, segundo McLachlan [18] e Barakat [22] a função contém duas funções denominadas de primeira função radial e segunda função radial onde cada função radial contém um conjunto de quatro (4) soluções.

2.4.1 PRIMEIRA SOLUÇÃO DA FUNÇÃO DE MATHIEU RADIAL

A função de Mathieu radial tem uma solução radial de ordem par (ou ímpar) denominada de primeira solução radial

Para se determinar essa solução é necessário retornar a expressão (2.3.6) e realizar uma troca de variáveis, apresentada por Goldstein [33], sob a seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \mu^2} - \left(d - \frac{h^2}{2} \cosh 2\mu\right) P = 0 \quad (2.4.1)$$

$$\frac{h^2}{2} = k^2$$

$$u = 2k \cosh \mu$$

$$q^2 = d + \frac{h^2}{2} \quad (2.4.2)$$

A equação (2.4.1) torna-se:

$$(u^2 - 4k^2) \frac{\partial^2 p}{\partial \mu^2} + u \frac{\partial p}{\partial \mu} + (u^2 + q^2) P = 0 \quad (2.4.3)$$

A solução da função modificada de Mathieu pode ser desenvolvida segundo a expansão de uma função de Bessel de ordem p e cujos coeficientes são os mesmos coeficientes de Fourier normalizados

utilizados nas funções periódicas de Mathieu. A solução para a equação modificada (2.4.3) apresentada por Mclachlan [18] tem a forma:

$$(h, \mu) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r c_{2r} J_{2r}(h \cosh \mu) \quad (2.4.4)$$

Substituindo (2.4.4) em (2.4.3) têm-se:

$$\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r C_{2r} \left[(u^2 - 4k^2) J_{2r}'' + u J_{2r}' + (u^2 - q^2) J_{2r} \right] = 0 \quad (2.4.5)$$

Utilizando as relações de recorrência existentes em Abramowitz [27] para as funções de Bessel, tem-se:

$$u^2 J_{2r}'' + u J_{2r}' + u^2 J_{2r} = 4r^2 J_{2r} \quad (A)$$

$$4J_{2r}'' = J_{2r-2} - 2J_{2r} + J_{2r+2} \quad (B)$$

Substituindo as relações de recorrência (A) e (B) em (2.4.3), obtém-se:

$$\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r C_{2r} \left[(4r^2 - a) J_{2r} - k^2 (J_{2r-2} + J_{2r+2}) \right] = 0 \quad (2.4.6)$$

De maneira análoga usada para as funções periódicas, a relação (2.4.6) pode ser usada para se obter as soluções dessa expressão igualando cada termo a zero da série desenvolvida enquanto r for variando ($r=0,1,2,3,\dots$), obtendo-se as expressões a seguir:

$$ac_0 - k^2 c_2 = 0$$

$$(a-4)c_2 - k^2(c_4 + 2c_0) = 0 \quad r \geq 2$$

$$(a-4)c_{2r} - k^2(c_{2r+2} - c_{2r-2}) = 0 \quad (2.4.7)$$

As relações em (2.4.7) fornecem as frações contínuas e as soluções devem ser desenvolvidas como fora feito, no item (2.3), para a obtenção das expressões das funções de Mathieu periódicas.

Como é proposto por Mclachlan [18] uma das soluções possíveis para a função radial tem um desenvolvimento baseado na série de Bessel com o argumento trigonométrico e a solução tem a seguinte forma :

$$ce_{2n}(h, \cosh \mu) = K \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{2n} J_{2r}(h \cosh \mu),$$

onde a constante k pode ser determinada através do estudo da convergência da função apresentado em Mclachlan[18] onde solução tem a forma final:

$$ce_{2n}(h, \cosh \mu) = \frac{ce_{2n}\left(\frac{\pi}{2}, h\right)}{A_0^{2n}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{2n} J_{2r}(h \cosh \mu) \quad (2.4.8)$$

A expressão (2.4.8) é determinada em McLachlan [18] como a primeira solução da função de Mathieu radial faz parte de um conjunto de quatro (4) soluções de acordo com a sua periodicidade (π ou 2π).

Apos algumas mudanças apresentadas por McLachlan[18] na expressão em (2.4.8) o conjunto de soluções podem ser apresentados sob a forma:

$$Je_{2n}(h, \mu) = (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k De_{2n}^{2k}(h) Je_{2k}(h \cosh \mu)$$

$$Je_{2n+1}(h, \mu) = (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k De_{2n+1}^{2k+1}(h) Je_{2k+1}(h \cosh \mu)$$

$$Jo_{2n}(h, \mu) = (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tanh \mu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k) Do_{2n}^{2k}(h) Jo_{2k}(h \cosh \mu)$$

$$Jo_{2n+1}(h, \mu) = (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tanh \mu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1) Do_{2k+1}^{2n+1}(h) Jo_{2k+1}(h \cosh \mu) \quad (2.4.9)$$

Em (2.4.9) $Jo_{2k+1}(h, \mu)$ é a função de Bessel impar e $Je_{2k+1}(h, \mu)$ é a função de Bessel par de ordem $2k+1$ com argumento hiperbólico. $De_{2k+1}^{2n+1}(h)$ e $Do_{2k+1}^{2n+1}(h)$ são os coeficientes normalizados que se transformam na primeira solução da função de Mathieu radial par ou impar já obtidos no item (2.3).

Os valores numéricos e respectivos gráficos de (2.4.9) estão apresentados no Anexo III.

2.4.2 SEGUNDA SOLUÇÃO DA FUNÇÃO DE MATHIEU RADIAL

Desde que as soluções de recorrência encontradas em McLachlan [18] para a função de Newmann do tipo $Y_{2r}(h \cosh \mu)$ com argumento hiperbólico, possam ser utilizadas satisfazendo a mesma equação diferencial (2.2.6), obtém-se a segunda solução da função de Mathieu radial sob a forma :

$$Ye_{2n}(h, \cosh \mu) = \frac{ce_{2n}(\frac{\pi}{2}, h)}{A_0^{2n}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{2n} Y_{2r}(h \cosh \mu) \quad (2.4.10)$$

A solução (2.4.10) é uma das quatro (4) soluções como fora feito no item anterior (2.3). A obtenção das quatro soluções em (2.4.10) requer um estudo detalhado sobre as frações contínuas (Anexo VI).

A partir da normalização dos coeficientes e respectivos números característicos se obtém os valores mais prováveis para cada função.

Os coeficientes D que farão parte da expansão das funções de Mathieu podem ser obtidos, via método Bickley-McLachlan [18] ou Barakat [26], para

pequenos valores de h ($h \leq 1.8$) pois a série de potência desses coeficientes não é convergente [vide anexo VI] para todos os valores mas, para um raio finito de convergência.

Então, a segunda solução das funções de Mathieu encontrada em Barakat [26] é também formada por um conjunto de quatro (4) equações que são escritas sob a forma:

$$\begin{aligned}
 Y_{e_{2n}}(h, \mu) &= (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k D_{e_{2k}}^{2n}(h) Y_{e_{2k}}(h \cosh \mu) \\
 Y_{e_{2n+1}}(h, \mu) &= (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k D_{e_{2k+1}}^{2n+1}(h) Y_{e_{2k+1}}(h \cosh \mu) \\
 Y_{o_{2n}}(h, \mu) &= (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tanh \mu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k) D_{o_{2k}}^{2n}(h) Y_{o_{2k}}(h \cosh \mu) \\
 Y_{o_{2n+1}}(h, \mu) &= (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tanh \mu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1) D_{o_{2k+1}}^{2n+1}(h) Y_{o_{2k+1}}(h \cosh \mu)
 \end{aligned}
 \tag{2.4.11}$$

Em (2.4.11) $Y_{e_{2k+1}}(h, \mu)$ ou $Y_{o_{2k+1}}(h, \mu)$ são funções de Newmann de ordem $2k+p\{0,1\}$ com argumento hiperbólico e D são os coeficientes normalizados. As expressões se transformam na segunda solução função de Mathieu radial.

Os valores numéricos e respectivos gráficos de (2.4.11) serão apresentados no Anexo III.

2.4.3 SOLUÇÕES COMBINADAS RADIAIS

Em problemas relacionados com propagação de ondas usando coordenadas elípticas requer-se que a solução seja uma composição de tal forma que as soluções obtidas nos itens 2.4.1 e 2.4.2 se combinem formando

um conjunto de soluções denominados funções combinadas de Mathieu e que são apresentadas em Mclachlan [26] sob a forma:

$$\text{He}_p = \text{Je}_p \pm i\text{Ye}_p \quad (2.4.12)$$

onde He_p é a função de Hankel complexa ou função de Mathieu combinada de ordem p que está associada a primeira e a segunda soluções apresentadas pelas expressões (2.4.9) e (2.4.11) respectivamente.

A solução para os problemas que serão abordados neste trabalho envolverá estas funções na forma:

$$\begin{aligned} \text{He}_{2n}^{1,2}(h, \mu) &= (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \text{De}_{2k}^{2n}(h) \text{H}_{2n}^{1,2}(h \cosh \mu) \\ \text{He}_{2n+1}^{1,2}(h, \mu) &= (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \text{De}_{2k+1}^{2n+1}(h) \text{H}_{2n+1}^{1,2}(h \cosh \mu) \\ \text{H}_{0,2n}^{1,2}(h, \mu) &= (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2} \tanh \mu} \sum_{k=0}^{\infty} \text{Do}_{2k}^{2n}(h) \text{H}_{2n}^{1,2}(h \cosh \mu) \\ \text{H}_{0,2n+1}^{1,2}(h, \mu) &= (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2} \tanh \mu} \sum_{k=0}^{\infty} \text{Do}_{2k+1}^{2n+1}(h) \text{H}_{2n+1}^{1,2}(h \cosh \mu) \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

Em (2.4.12) $\text{He}(h, \mu)_p$ ou $\text{H}_0(h, \mu)_p$ representam a função de Hankel ou a função combinada radial de Mathieu par ou ímpar.

Os valores numéricos e respectivos gráficos de (2.4.12) serão apresentados no Anexo III.

2.4.4 DERIVADA DA PRIMEIRA SOLUÇÃO RADIAL

Usando a definição de derivada de uma função a derivada da primeira solução radial da função de Mathieu passa a ter a forma:

Em (2.4.13) $\bar{J}e_{2n}(h, \mu)$ representa a derivada de primeira ordem da primeira solução da função de Mathieu radial. Analogamente como em outros casos este item terá um conjunto de quatro(4) soluções para a derivada.

Usando a definição de derivada de uma função a derivada da primeira ordem da função de Mathieu, passa a ter a forma:

$$\bar{J}e_{2n}(h, \mu) = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (-1)^n \operatorname{sen} \mu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \operatorname{De}_{2k}^{2n} \left[\frac{dJ_{2k}(h \cosh \mu)}{d(h \cosh \mu)} \right] \quad (2.4.13)$$

onde:

$$\frac{dJ_{2k}(h \cosh \mu)}{d(h \cosh \mu)} = \frac{1}{2} [J_{m-1}(h \cosh \mu) - J_{m+1}(h \cosh \mu)] \quad (2.4.14)$$

Em (2.4.13) $\bar{J}e_{2n}(h, \mu)$ representa a derivada de primeira ordem da primeira solução da função de Mathieu radial. Analogamente como em outros casos este item terá um conjunto de quatro(4) soluções para a derivada que pode ser escritos sob a forma:

$$\bar{J}e_{2n}(h, \mu) = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (-1)^n \operatorname{sen} \mu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \operatorname{De}_{2k}^{2n} \left[\frac{dJ_{2k}(h \cosh \mu)}{d(h \cosh \mu)} \right]$$

$$\bar{J}e_{2n+1}(h, \mu) = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (-1)^n \operatorname{sen} \mu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \operatorname{De}_{2k+1}^{2n+1} \left[\frac{dJ_{2k+1}(h \cosh \mu)}{d(h \cosh \mu)} \right]$$

$$\bar{J}o_{2n}(h, \mu) = (\operatorname{senh} \mu \cosh \mu)^{-1} J o_{2n}(h, \mu) \frac{h}{2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} (-1)^n \tanh \mu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \operatorname{Do}_{2k}^{2n} \left[\frac{dJ_{2k}(h \cosh \mu)}{d(h \cosh \mu)} \right]$$

$$\bar{J}o_{2n+1}(h, \mu) = (\operatorname{senh} \mu \cosh \mu)^{-1} J o_{2n+1}(h, \mu) \frac{h}{2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} (-1)^n \tanh \mu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1) \operatorname{Do}_{2k+1}^{2n+1} \left[\frac{dJ_{2k+1}(h \cosh \mu)}{d(h \cosh \mu)} \right]$$

(2.4.15)

Os valores numéricos e respectivos gráficos de (2.4.15) serão apresentados no Anexo III.

2.4.5 DERIVADA DA SEGUNDA SOLUÇÃO RADIAL

Usando a definição de derivada de uma função a derivada da segunda solução radial da função de Mathieu passa a ter a forma:

$$\bar{Y}_{e_{2n}}(h, \mu) = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (-1)^n \sin \mu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \text{De}_{2k}^{2n} \left[\frac{dY_{2k}(h \cosh \mu)}{d(h \cosh \mu)} \right] \quad (2.4.16)$$

onde:

$$\frac{dY_{2k}(h \cosh \mu)}{d(h \cosh \mu)} = \frac{1}{2} [Y_{m-1}(h \cosh \mu) - Y_{m+1}(h \cosh \mu)] \quad (2.4.17)$$

Em (2.4.16) $\bar{Y}_{e_{2n}}(h, \mu)$ representa a derivada de primeira ordem da segunda solução radial da função de Mathieu radial. Analogamente com em outros casos este item terá um conjunto de quatro(4) soluções para a derivada.

Usando a definição de derivada de uma função a derivada da primeira solução da função de Mathieu passa a ter a forma:

$$\bar{J}_{e_{2n}}(h, \mu) = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (-1)^n \sin \mu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \text{De}_{2k}^{2n} \left[\frac{dJ_{2k}(h \cosh \mu)}{d(h \cosh \mu)} \right] \quad (2.4.18)$$

onde:

$$\frac{dJ_{2k}(h \cosh \mu)}{d(h \cosh \mu)} = \frac{1}{2} [J_{m-1}(h \cosh \mu) - J_{m+1}(h \cosh \mu)] \quad (2.4.19)$$

A expressão $\bar{J}_{e_{2n}}(h, \mu)$ representa a derivada de primeira ordem da primeira solução da função de Mathieu radial. Analogamente como em outros casos este item terá um conjunto de quatro(4) soluções para a derivada.

$$\bar{Y}_{e_{2n}}(h, \mu) = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (-1)^n \sin \mu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \text{De}_{2k}^{2n} \left[\frac{dY_{2k}(h \cosh \mu)}{d(h \cosh \mu)} \right]$$

$$\begin{aligned}
\bar{Y}e_{2n+1}(h, \mu) &= \frac{h}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (-1)^n \operatorname{sen} \mu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \operatorname{De}_{2k+1}^{2n+1} \left[\frac{dY_{2k+1}(h \cosh \mu)}{d(h \cosh \mu)} \right] \\
\bar{Y}o_{2n}(h, \mu) &= (\sinh \mu \cosh \mu)^{-1} Y o_{2n}(h, \mu) \frac{h}{2} \\
&+ \sqrt{\frac{\pi}{2}} (-1)^n \tanh \mu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \operatorname{Do}_{2k}^{2n} \left[\frac{dY_{2k}(h \cosh \mu)}{d(h \cosh \mu)} \right] \\
\bar{Y}o_{2n+1}(h, \mu) &= (\sinh \mu \cosh \mu)^{-1} Y o_{2n+1}(h, \mu) \frac{h}{2} \\
&+ \sqrt{\frac{\pi}{2}} (-1)^n \tanh \mu \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1) \operatorname{Do}_{2k+1}^{2n+1} \left[\frac{dY_{2k+1}(h \cosh \mu)}{d(h \cosh \mu)} \right]
\end{aligned} \tag{2.4.20}$$

Os valores numéricos e respectivos gráficos de (2.4.18) e (2.4.20) serão apresentados no Anexo III.

2.4.6 DERIVADA DAS SOLUÇÕES COMBINADAS RADIAIS

Usando a definição apresentadas anteriormente, as derivadas das funções combinadas radiais de Mathieu terão a forma apresentada a seguir:

$$\bar{H}e_{2n}^{1,2}(h, \mu) = (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{De}_{2k}^{2n}(h) \bar{H}_{2n}^{1,2}(h \cosh \mu) \tag{2.4.21}$$

Onde $\bar{H}e_p^{1,2}(h, \mu)$ é a derivada de primeira ordem da função combinada de Mathieu de ordem p e $\bar{H}_p^{1,2}(h \cosh \mu)$ é a função de Hankel de ordem p com argumento hiperbólico.

Os valores numéricos e respectivos gráficos de (2.4.21) serão apresentados no Anexo III.

2.5 RESUMO DO CAPÍTULO 2

A equação para a pressão acústica em coordenadas elípticas (2.1.2) e a solução para essa equação (2.1.19) são obtidas neste capítulo. A forma canônica das equações de Mathieu periódicas e radiais e respectivas derivadas são apresentadas pelo organograma na figura 2.1.

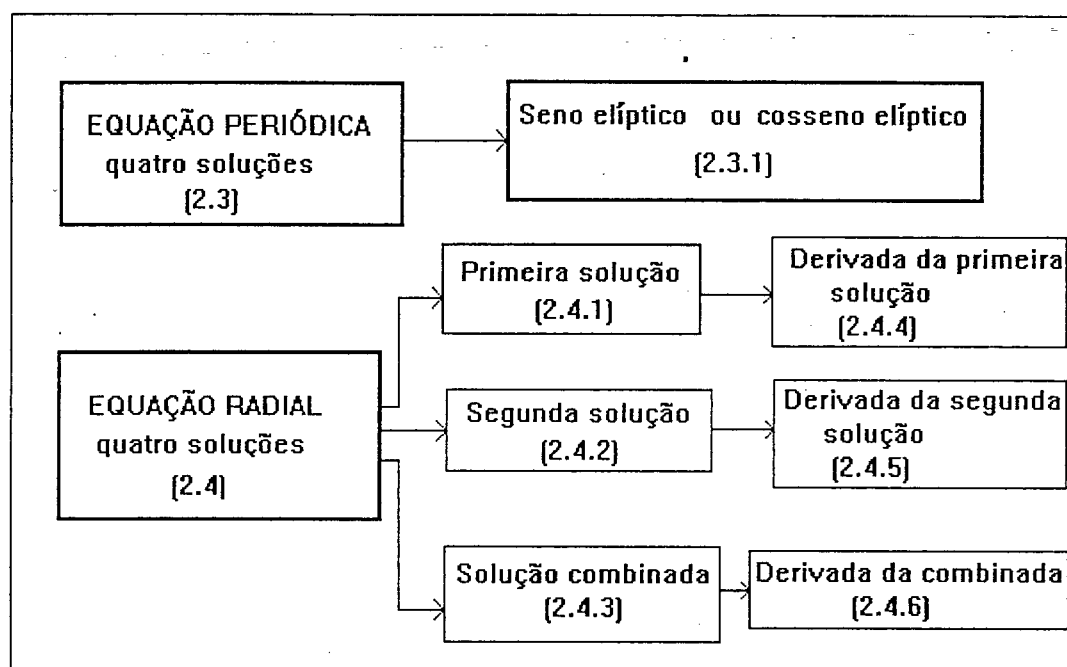


Figura 2.1: Organograma das funções de Mathieu e respectivos itens.

CAPÍTULO 3

3.0 EFICIÊNCIA DE RADIAÇÃO

O ruído gerado por vibrações de estruturas pode ser quantificado através do nível de pressão sonora ou nível de potência sonora. A dificuldade para se avaliar pressão acústica ou o nível de pressão sonora está relacionada com o ambiente no qual o nível de pressão será medido, a orientação ou diretividade da fonte assim como a distância entre o operador e a fonte a ser analisada. O nível de potência sonora, no entanto, é uma propriedade física característica da fonte e consequentemente independe do ambiente onde a fonte se encontra. Assim avaliar a potência acústica radiada por uma fonte é um parâmetro absoluto e importante para o controle de ruído. Outro parâmetro que também fornece uma indicação de como a fonte irradia energia sonora é o parâmetro adimensional denominado de eficiência de irradiação.

3.1 ANEL ELÍPTICO

A partir da solução da equação da onda para pressão acústica em coordenadas elípticas obtidas pela expressão (2.1.19) que envolve as soluções das equações de Mathieu e a convergências de seus resultados (vide anexo VII), pode-se determinar a potência acústica e a eficiência de radiação para os casos em estudo.

Não levando em consideração o número de onda axial, $k_z = \frac{\pi s}{\dots}$,

onde s é o número de modo estrutural e realizando um estudo particular para

um cilindro elíptico infinito (2D), onde a velocidade normal superficial é dada por:

$$V_N = V_0 \cdot \text{sen}(m\theta) e^{-i\omega t} \quad (3.1.1)$$

onde V_0 é uma constante real representando a amplitude da velocidade, pode-se obter a eficiência de radiação para o caso particular do anel elíptico.

3.2 CÁLCULO DA POTÊNCIA ACÚSTICA

A equação da pressão acústica para um anel elíptico pode ser escrita a partir da equação (2.1.19) sob a forma:

$$P(\mu, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\bar{e}^{i\omega t}}{2\pi} \frac{H_m(h \cdot \cosh \mu)}{h \cdot \cos \theta \cdot \bar{H}_m(h \cdot \cosh \mu)} \frac{\int_0^{2\pi} \text{sen} \theta \cdot \text{Se}_n(h \cdot \cos \theta) d\theta d\theta}{\int_0^{2\pi} \text{Se}_n(h \cdot \cos \theta) \cdot \text{Se}_m(h \cdot \cos \theta) d\theta} \cdot \text{Se}_m(h \cdot \cos \theta) e^{ikz} dk \quad (3.2.1)$$

$P(\mu, \theta, t)$ é a pressão acústica para todos os modos de vibração e, as expressões de integração contidas em (3.2.1) foram utilizadas por Blake [19] e por Jeyapalan [16] em seus respectivos trabalhos sob a forma:

$$B_1^0(h) = \int_0^{2\pi} \text{sen} \theta \text{Se}_n(h, \cos \theta) d\theta \quad (3.2.2)$$

$$M_m^0(h) = \int_0^{2\pi} \text{Se}_m(h, \cos \theta) \text{Se}_n(h, \cos \theta) d\theta$$

Substituindo as respectivas alterações descritas em (3.2.2) na expressão (3.2.1), obtém-se:

$$p(\mu, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_1^0(h)}{M_m^0(h)} \frac{H_m(h, \cosh \mu)}{\bar{H}_m(h, \cosh \mu)} \Big]_{\text{imag}} S e_m(h, \cos \theta) e^{ikz} dk \quad (3.2.3)$$

A potência acústica média radiada em um ciclo de período T(segundos), segundo Heckl [35] é:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{2\pi} \int_0^\ell \left[p(\mu_0, \theta, t)_{\text{real}} v_{\text{real}} \right] d\ell d\theta dt \quad (3.2.4)$$

onde $\langle w \rangle$ é a potência radiada, média no tempo e espaço e será obtida através de uma seção elíptica infinitesimal mostrada na figura (3.1).

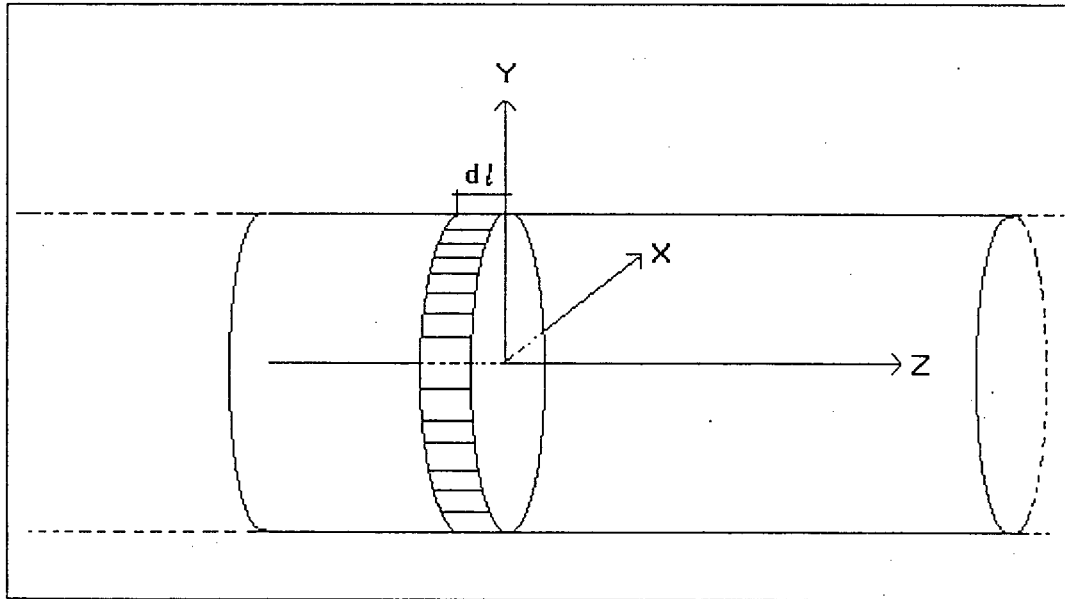


Figura 3.1: Seção elíptica infinitesimal.

Substituindo as expressões (3.2.3) e (3.1.1) na expressão (3.2.4) e separando as integrais obtém-se:

$$\langle W \rangle = i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\omega \rho V_0^2}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt \int_0^{2\pi} \cos^2 m\theta d\theta \int_0^{\cdot} d \frac{B_1^0(h)}{M_1^0(h)} \left[\frac{H_m(h, \cosh \mu)}{h \cos \theta \bar{H}_m(h, \cosh \mu)} \right]_{\text{imag}} \quad (3.2.5)$$

cujo resultado final será:

$$\langle W \rangle = i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\omega \cdot \pi V_0^2 \rho}{2} \left[\frac{H_m(h, \cosh \mu)}{h \cos \theta \bar{H}_m(h, \cosh \mu)} \right]_{\text{imag}} \quad (3.2.6)$$

Em (3.2.6) as expressões $H_m(h, \cosh \mu)$ e $\bar{H}_m(h, \cosh \mu)$ podem ser desdobradas sob a forma:

(1) - $H_m(h, \cosh \mu) = He_m(h, \cosh \mu)$ para a função de Mathieu combinada de ordem par.

(2) - $H_m(h, \cosh \mu) = Ho_m(h, \cosh \mu)$ para a função de Mathieu combinada de ordem ímpar.

A expressão (3.2.6) fornece a potência acústica radiada por um anel elíptico para vários modos de vibrações. A expressão (3.2.6) e (3.2.5) são idênticas e, ambas representam as mesmas funções combinada de Mathieu, isto é:

$He_m(h, \cosh(\mu))$ é uma solução combinada de Mathieu na forma complexa de ordem m , que contém:

$$He_m(h, \cosh(\mu)) = Je_m(h, \cosh(\mu)) + i \cdot Ye_m(h, \cosh(\mu)) \quad (3.2.7)$$

O membro da direita da expressão (3.2.7) contém as equações de primeira e segunda ordem radiais de Mathieu.

Na expressão (3.2.6) as derivadas das equações contidas na derivada da função de Mathieu combinada podem ser desenvolvidas utilizando-se as expressões de recorrência usadas em Abramowitz [22]:

$$\bar{J}e_m(h, \cosh(\mu)) = \frac{1}{2} (J e_{m-1}(h, \mu) - J e_{m+1}(h, \mu))$$

$$\bar{Y}e_m(h, \cosh(\mu)) = \frac{1}{2} (Y e_{m-1}(h, \mu) - Y e_{m+1}(h, \mu)) \quad (3.2.8)$$

$$i Y e_m(h, \mu) \bar{J} e_m(h, \mu) - i J e_m(h, \mu) \bar{Y} e_m(h, \mu) = -\frac{2i}{\pi h} \quad (3.2.9)$$

A expressão (3.2.6) representa a potência acústica radiada por uma superfície cilíndrica elíptica para m modos de vibração e a partir das relações de recorrência (3.2.8) e (3.2.9) é possível obter resultados para o estudo de casos particulares que serão apresentados a seguir.

3.3 EFICIÊNCIA DE RADIAÇÃO ACÚSTICA DE UM ANEL PULSANTE

A obtenção do parâmetro eficiência de radiação será tratado neste item para o modelo anel pulsante (vide figura 3.1).

A figura 3.2 abaixo, representa a forma geométrica que será tratado o anel elíptico em modo pulsante, com as respectivas coordenadas.

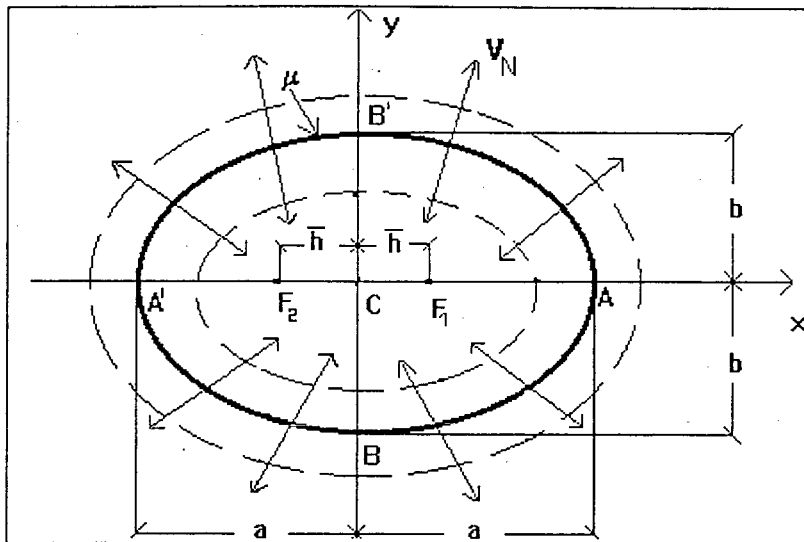


Figura 3.2: Vista de um anel elíptico na forma pulsante ($m=0$).

onde:

$$e = \frac{CF_1}{CA} = \frac{CF_2}{CA'} = \frac{\bar{h}}{a}$$

e é a excentricidade

$CF_1=CF_2 = \bar{h}$ é a distância do centro ao foco

$$\bar{h} = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$a = CA = CA'$ semi eixo maior

$b = CB = CB'$ semi eixo menor

Assim \bar{h} é argumento geométrico da função elíptica, onde o argumento completo para as duas funções (periódica e radial) tem a forma:

$$(1) - h \cosh \mu = \bar{h} \cdot k_0 \cdot \cosh \mu \quad \text{para a função radial}$$

$$(2) - h \cdot \cos \theta = \bar{h} \cdot k_0 \cdot \cos \theta \quad \text{para a função periódica}$$

onde:

μ é o ângulo de variação sobre a elipse.

θ é o ângulo de variação sobre a hipérbole.

Se um anel elíptico (2D) se expande e se contrai uniformemente, conforme a figura (3.2), a sua velocidade superficial pode ser descrita como:

$$\begin{aligned} &\text{De } 0 \text{ até } \pi \rightarrow +v_0 \\ &\text{De } \pi \text{ até } 2\pi \rightarrow -v_0 \end{aligned} \quad \text{ou sob a forma: } V_N = v_0 e^{-i\omega t} \quad (3.3.1)$$

onde V_N é a velocidade normal à superfície.

Através da expressão (2.1.17) se determina A_m pela condição de contorno que é dada quando a velocidade da partícula é igual a velocidade normal superficial; isto é:

$$V_N = -\frac{1}{i\omega \cdot \rho} \left[\frac{\partial P}{\partial \mu} \right]_{\mu = \mu_0} \quad (3.3.2)$$

V_N é a velocidade normal superficial

Para o anel que se move de forma pulsante (vide figura 3.2), sendo portanto independente do ângulo θ , leva a se ter todos os termos de A_m iguais a zero em (2.1.17), exceto para o termo independente $m=0$, isto é o termo A_0 .

Determinando a derivada da pressão acústica expressa em (3.2.3), obtém-se:

$$\frac{\partial p}{\partial \mu} = -\frac{1}{2\pi i \omega \rho} e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_m h \cdot \coth \mu_0 \bar{H}_0(m, \mu_0) S e_m(h, \theta) e^{ikz} dk \quad (3.3.3)$$

onde:

$$\bar{H}o_m(\mu_0, h) = \frac{\partial H_o(\mu_0, h)}{\partial \mu} \bigg|_{\mu = \mu_0} \text{ representa a derivada da função impar}$$

composta de Mathieu.

Substituindo (3.3.3) e (3.3.1) em (3.3.2), obtém-se:

$$V_0 \cdot e^{-i\omega t} = \frac{e^{i\omega t}}{2\pi i \omega \rho} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_m h \cdot \cosh \mu_0 \bar{H}o_m(h \cdot \cosh \mu_0) Se_m(h, \theta) e^{-i\omega t} e^{ikz} dk \quad (3.3.4)$$

Multiplicando ambos os lados de (3.3.4) por $Se_n(h, \theta)$, tem-se:

$$Se_n(h, \theta) V_0 \cdot e^{-i\omega t} = \frac{e^{-i\omega t}}{2\pi i \omega \rho} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cdot h \cdot \bar{H}o_m(h, \mu) Se_m(h, \theta) Se_n(h, \theta) d\theta e^{ikz} dk \quad (3.3.5)$$

Usando as propriedades de ortogonalidade [21] se tem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Se_n(h, \theta) Se_m(h, \theta) d\theta = \pi \text{ se } m = n \text{ ou } 0 \text{ se } m \neq n$$

$$A_0 h \cdot \cosh \mu_0 \bar{H}o_0(h \cdot \cosh \mu_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikz} dk \quad (3.3.6)$$

O segundo membro da expressão (3.3.6) corresponde à função delta de Dirac, onde $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - a) = f(a)$, portanto, substituindo a expressão (3.3.6) na expressão (3.2.1) obtém-se a expressão para a pressão acústica para uma casca elíptica em modo oscilante.

$$p(\mu, \theta, t) = \frac{i \cdot \omega \cdot V_0}{h \cdot \cosh \mu_0} \cdot \frac{Ho_0(h, \mu)}{Ho_0(h, \mu_0)} \cdot e^{-i\omega t} \quad (3.3.7)$$

$Ho_0(h, \mu)$ é a solução combinada das funções de Mathieu impar de ordem zero.

$\bar{Ho}_0(h, \mu_0)$ é a função derivada combinada de Mathieu impar de ordem zero.

McLanchlan [18] demonstra que a solução para a função de Mathieu tem duas soluções que podem ser combinadas sob a forma de função de Hankel cujo argumento é trigonométrico como fora desenvolvido nos itens anteriores.

Usando a definição de potência acústica de radiação [35] como sendo:

$$\langle w \rangle = \int_0^l \int_0^{2\pi} I \cdot r d\theta dz \quad (3.3.8)$$

onde:

I é a intensidade acústica.

Na expressão (3.3.8) a intensidade acústica [35] está definida como:

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T P_{\text{real}} \cdot V_{\text{real}} dt \quad (3.3.9)$$

Substituindo as expressões P_{real} e V_{real} obtém-se:

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{\omega \rho V_0}{h \cdot \cosh \mu_0} \left[\frac{Ho_0(h, \mu)}{\bar{Ho}_0(h, \mu_0)} \right] \right)_{\text{imag}} \cdot V_0 \cdot dt$$

$$\langle W \rangle = i \frac{\pi V_0^2 \omega \rho}{2} \left[\frac{H_{00}(\mu, h)}{H_{00}(\mu_0, h)} \right]_{\text{imag}} \quad (3.3.10)$$

A resistência de radiação definida por Heckl [35] é:

$$R_{\text{rad}} = \frac{\langle w \rangle}{\langle \bar{v}^2 \rangle} \quad (3.3.11)$$

onde:

$\langle \bar{v}^2 \rangle$ é a velocidade média quadrática em relação ao tempo e espaço ,
que pode ser calculada como:

$$\langle \bar{v}^2 \rangle = v_0^2 \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt \quad (3.3.12)$$

A expressão para a eficiência de radiação [35], [20] é definida por:

$$\sigma_{\text{rad}} = \frac{R_{\text{rad}}}{\rho c S}$$

onde:

ρ é a densidade do meio

S é a área da superfície da fonte

Usando a expressão [35]:

$$\sigma_{\text{rad}} = \frac{\langle w \rangle}{\rho c S \langle \bar{v}^2 \rangle} \quad (3.3.13)$$

Substituindo (3.3.10) em (3.3.13) é possível obter a eficiência de radiação sob a forma:

$$\sigma_{\text{rad}} = i \left[\frac{H_{00}(h, \mu_0)}{\bar{H}_{00}(h, \mu_0)} \right]_{\text{imag}} \quad (3.3.14)$$

Multiplicando (3.3.14) pela expressão que representa o conjugado do denominador, obtém-se:

$$\sigma_{\text{rad}} = i \left[\frac{H_{00}(h, \mu) \cdot \bar{H}_{00}^*(h, \mu)}{\bar{H}_{00}(h, \mu) \cdot \bar{H}_{00}^*(h, \mu)} \right]_{\text{imag}} \quad (3.3.15)$$

onde:

$\bar{H}_{00}^*(h, \mu)$ é a expressão que representa o conjugado da função derivada de Mathieu combinada de ordem zero.

Abramowitz [21] apresenta uma relação que pode ser substituída no numerador da expressão em (3.3.15). Esse produto é apresentado no lado direito do sinal de igualdade em (3.3.16).

$$H_{00}(h, \mu) \cdot \bar{H}_{00}^*(h, \mu) = [J_m \bar{J}_m + Y_m \bar{Y}_m] + [Y_m \bar{J}_m - J_m \bar{Y}_m] \cdot i \quad (3.3.16)$$

Utilizando somente a parte imaginária de (3.3.16) obtém-se a expressão, usada e Abramowitz [21], sob a forma:

$$Y_m \bar{J}_m - J_m \bar{Y}_m = \frac{2i}{\pi h} \quad (3.3.17)$$

Substituindo (3.3.17) em (3.3.15), tem-se:

$$\sigma_{\text{rad}} = i \left[\frac{2.i}{\pi.h.\cosh\mu} \right] \frac{1}{|\bar{H}_{00}(h.\cosh\mu)|} \quad (3.3.18)$$

$$\sigma_{\text{rad}} = \frac{2}{\pi.h} \frac{1}{|\bar{H}_{00}(h.\cosh\mu)|} \quad (3.3.19)$$

A expressão (3.3.19) é uma forma fechada para se obter a eficiência de radiação de um anel elíptico sob a forma pulsante e, alguns valores, de acordo com cada parâmetro, serão apresentando na seção 4.1.

3.4 EFICIÊNCIA DE RADIAÇÃO DE UM ANEL OSCILANTE

Nesta seção será tratado o caso de um anel oscilante onde a velocidade da superfície é dada pela expressão (3.4.1) a seguir. A figura (3.3) é a forma geométrica em que será tratado o anel elíptico em modo oscilante e respectivas coordenadas a serem usadas.

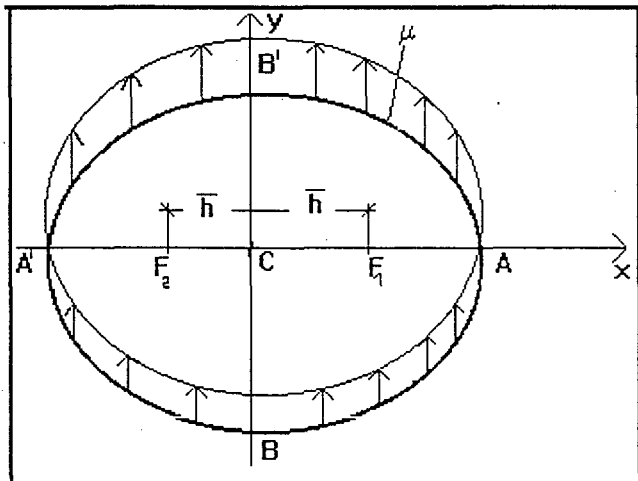


Figura 3.3: Vista de um anel elíptico em forma oscilante.

A figura 3.3 mostra o anel elíptico oscilante onde:

$$e = \frac{CF_1}{CA} = \frac{CF_2}{CA'} = \frac{\bar{h}}{a}$$

e é a excentricidade

$CF_1=CF_2 = \bar{h}$ é a distância do centro ao foco

$$\bar{h} = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$a = CA = CA'$ semi eixo maior

$b = CB = CB'$ semi eixo menor

A condição de contorno para um anel elíptico oscilante está relacionado com a expressão da velocidade normal superficial que pode ser expressa sob a forma:

$$V = v_0 \sin\theta e^{-i\omega t}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (3.4.1)$$

Para caso em que o anel se move dependendo do ângulo θ (no modo oscilante), tem-se o termo $\sin\theta$ presente na expressão o que leva a se obter somente um termo para os A_m ; isto é, quando $m=1$, fazendo com que todos os outros termos em (3.2.5) se tornem nulos.

Reescrevendo a expressão (3.2.3) para a pressão acústica obtém-se:

$$p(\mu, \theta, t) = \frac{e^{-i\omega t}}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} A_m H_m(h \cosh \mu) S_m(h \cos \theta) e^{ikz} dk \quad (3.4.2)$$

A expressão (3.4.2) para a pressão acústica aplicada ao caso do anel oscilante é uma função par e fica sob a forma:

$$P(\mu, \theta, t) = i\omega p e^{-i\omega t} V_0 \frac{He_1(h, \mu)}{\bar{He}_1(h, \mu)} \quad (3.4.3)$$

Reescrevendo a expressão (3.2.5) pode-se determinar um valor para A_m que é dada pela condição de contorno.

De forma análoga ao caso do anel oscilante, obtém-se a expressão (3.4.4) abaixo.

$$V_0 \cdot e^{-i\omega t} = \frac{e^{-i\omega t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_m h \cdot \cosh \mu_0 \cdot \bar{He}_m(h \cdot \cosh \mu_0) Se_m(h \cdot \cos \theta) e^{ikz} dk \quad (3.4.4)$$

Multiplicando ambos os lados de (3.4.4) por $Se_n(h, \theta)$, tem-se:

$$Se_n(h, \theta) V_0 e^{-i\omega t} = \frac{e^{-i\omega t}}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_m h \cdot \bar{He}_m(h \cdot \cosh \mu) Se_n(h \cdot \cos \theta) \right. \\ \left. Se_m(h \cdot \cos \theta) d\theta e^{ikz} dk \right] \quad (3.4.5)$$

Usando as propriedades de ortogonalidade [21] tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} Se_n(h, \theta) Se_m(h, \theta) d\theta &= \\ &= \pi, \quad m = n \\ &= 0, \quad m \neq n \end{aligned}$$

O valor de A_1 pode ser obtido de forma análoga ao desenvolvimento realizado no item anterior pela forma:

$$A_1 = \frac{2 \cdot V_0 Se_1(h, \theta)}{h \cdot \cosh \mu_0} \cdot \frac{1}{\bar{He}_1(h, \mu_0)} \quad (3.4.6)$$

Substituindo a expressão (3.4.6) na expressão (3.2.8) obtém-se a expressão para a pressão acústica para uma casca elíptica em modo oscilante.

$$p(\mu, \theta, t) = \frac{i \cdot \omega \cdot V_0}{2 \cdot \pi \cdot h} \cdot \frac{He_1(h, \mu)}{\overline{He}_1(h, \mu_0)} \cdot e^{-i\omega t} \quad (3.4.7)$$

$He_1(h, \mu)$ é a solução combinada das funções de Mathieu.

McLanchlan [18] demonstrou que a solução para a função de Mathieu tem duas soluções que podem ser combinadas sob a forma de função de Hankel cujo argumento é trigonométrico.

$He_1(\mu, h)$ é a solução para a equação radial de Mathieu de primeira ordem.

Usando a definição de potência de radiação [35] como sendo:

$$\langle w \rangle = \int_0^1 \int_0^{2\pi} I \cdot r \, d\theta \, dz \quad (3.4.8)$$

Na expressão (3.4.8) a intensidade acústica está definida como:

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T P_{\text{real}} \cdot V_{\text{real}} \, dt \quad (3.4.9)$$

A potência acústica fica sob a forma:

$$\langle W \rangle = i \cdot \frac{\pi \cdot V_0^2 \cdot \omega \cdot \rho \cdot a}{2} \left[\frac{He_1(\mu_0, h)}{\overline{He}_1(\mu_0, h)} \right]_{\text{imag}} \quad (3.4.10)$$

Multiplicando (3.4.10) pela expressão que representa o conjugado do denominador, obtém-se:

$$\sigma_{\text{rad}} = i \left[\frac{\text{He}_1(h, \mu) \cdot \overline{\text{He}}_1^*(h, \mu)}{\overline{\text{He}}_1(h, \mu) \cdot \overline{\text{He}}_1^*(h, \mu)} \right]_{\text{imag}} \quad (3.4.11)$$

Usando a relação em Abramowitz [21] pode-se escrever o produto do numerador da expressão acima sob a forma:

$$\text{He}_1(h, \mu) \cdot \overline{\text{He}}_1^*(h, \mu) = [J_m \bar{J}_m + Y_m \bar{Y}_m] + [Y_m \bar{J}_m - J_m \bar{Y}_m] \cdot i$$

onde:

$$Y_m \bar{J}_m - J_m \bar{Y}_m = \frac{2i}{\pi h} \quad (3.4.12)$$

Substituindo (3.4.12) em (3.4.11) tem-se:

$$\sigma_{\text{rad}} = \frac{2}{\pi h} \frac{1}{|\overline{\text{He}}_1(h, \cosh \mu)|} \quad (3.4.13)$$

Para a determinação da computação numérica da eficiência de radiação na expressão (3.4.13) é necessário o estudo sobre as funções de Mathieu e sua derivada; assim como suas fórmulas de recorrência.

O resultado que será apresentado, no capítulo 4.2, para alguns valores, de acordo com os parâmetros.

CAPÍTULO 4.0

4.0 SOLUÇÕES PARA CASOS PARTICULARES

4.1 MODELOS

A radiação de cascas elípticas será apresentada neste capítulo utilizando o parâmetro eficiência de radiação para dois casos particulares:

- a) vibrando em modo pulsante ($m=0$)
- b) vibrando em modo oscilante ($m=1$).

O algoritmo foi desenvolvido nos capítulos antecedentes, através de um modelo matemático a partir da formulação apresentada obtendo-se pressão acústica, potência, intensidade e a eficiência de radiação tomando como partida a equação de Helmholtz em coordenadas elípticas e a solução expressa em termos das funções de Mathieu e respectivos coeficientes normalizados.

O cálculo da eficiência será efetuado seguindo as seguintes etapas:

1 - Aplicação direta dos modelos matemáticos desenvolvidos nos capítulos anteriores no software MATHCAD 5.0 para a obtenção da eficiência de radiação e o fator de perda de radiação para os modos mencionados.

2 - Uso do software ANSYS 5.0 para gerar as malhas do cilindro elíptico infinito (2D) e através da análise modal obter os modos de vibrações para os dois casos particulares.

3 - Uso do software SYSNOISE 5.0 para obter a eficiência de radiação.

4.2 ANEL ELÍPTICO PULSANTE

A solução para eficiência de radiação para o modelo anel elíptico pulsante será analisada através da expressão [3.2.11], reescrita sob a forma:

$$\sigma_{\text{rad}} = i \left[\frac{H_0(h, \mu)}{\bar{H}_0(h, \mu)} \right]_{\text{imag}} \quad (4.1)$$

Multiplicando (4.1) pela expressão que representa o conjugado do denominador obtém-se:

$$\sigma_{\text{rad}} = i \left[\frac{H_0(h, \mu) \cdot \bar{H}_0^*(h, \mu)}{H_0(h, \mu) \cdot \bar{H}_0^*(h, \mu)} \right]_{\text{imag}} \quad (4.2)$$

onde $\bar{H}_0^*(h, \mu)$ é o conjugado da função derivada de Hankel de ordem zero.

Abramowitz [27] e McLachan [18] fornecem a relação para o numerador da expressão (4.2) sob a forma:

$$H_0(h, \mu) \cdot \bar{H}_0^*(h, \mu) = [J_m \bar{J}_m + Y_m \bar{Y}_m] + [Y_m \bar{J}_m - J_m \bar{Y}_m] \cdot i \quad (4.3)$$

A parte imaginária da expressão (4.3) pode ser simplificada [18] sob a forma:

$$(Y_m \bar{J}_m - J_m \bar{Y}_m) i = \frac{2 \cdot i}{\pi \cdot h} \quad (4.4)$$

Substituindo (4.4) em (4.2) obtém-se:

$$\sigma_{\text{rad}} = \frac{2}{\pi \cdot h} \frac{1}{\left| \overline{H}_0(h \cdot \cosh \mu) \right|} \quad (4.6)$$

A expressão (4.6) é a eficiência de radiação de um cilindro elíptico pulsante na forma normalizada.

A partir das relações apresentadas por Heckl [35], Gerges [20] e apresentadas em (4.7) sob a forma:

$$W = R_{\text{rad}} \cdot \left\langle V^2 \right\rangle = \omega \cdot \eta_{\text{rad}} \cdot \left\langle V^2 \right\rangle = \rho \cdot S \sigma_{\text{rad}} \left\langle v^2 \right\rangle \quad (4.7)$$

onde:

η_{rad} é o fator de perda de radiação

w é a potência de radiação

σ_{rad} é a eficiência de radiação

R_{rad} é a resistência de radiação

Através das relações apresentadas em (4.7) pode se escrever a eficiência de radiação em função do fator de perda de radiação sob a forma:

$$\sigma_{\text{rad}} = \eta_{\text{rad}} \left(\frac{\rho_m}{\rho_0} \right) \left[1 - \frac{a_i b_i}{ab} \right] = \frac{2}{\pi \cdot h} \frac{1}{\left| \overline{H}_0(h \cdot \cosh \mu_0) \right|} \quad (4.8)$$

onde:

ρ_m é a densidade da casca

ρ é a densidade do meio

a_i é o semi eixo maior interno perpendicular ao modo de vibração

b_i é o semi eixo menor interno

a é o semi eixo maior perpendicular ao modo de vibração

b é o semi eixo menor

4.3 ANEL ELÍPTICO OSCILANTE

A solução para eficiência de radiação para o modelo anel elíptico oscilante será analisada através da expressão [3.3.11] e reescrita sob a forma:

$$\eta_{\text{rad}} = i \left[\frac{\text{He}_1(h, \mu)}{\overline{\text{He}}_1(h, \mu)} \right]_{\text{imag}} \quad (4.8)$$

onde $\overline{\text{H}}_1^*(h, \mu)$ é o conjugado da função derivada de Hankel de primeira ordem.

Multiplicando (4.8) pela expressão que representa o conjugado do denominador, obtém-se:

$$\sigma_{\text{rad}} = i \left[\frac{\text{He}_1(h, \mu) \cdot \overline{\text{He}}_1^*(h, \mu)}{\overline{\text{He}}_1(h, \mu) \cdot \overline{\text{He}}_1^*(h, \mu)} \right]_{\text{imag}} \quad (4.9)$$

Abramowitz [27] e McLachan [18] fornecem a relação para o numerador da expressão (4.9) sob a forma:

$$\begin{aligned} \text{He}_1(h, \mu) \cdot \overline{\text{He}}_1^*(h, \mu) &= [J_m \bar{J}_m + Y_m \bar{Y}_m] + [Y_m \bar{J}_m - J_m \bar{Y}_m] \cdot i \\ (Y_m \bar{J}_m - J_m \bar{Y}_m) i &= \frac{2 \cdot i}{\pi \cdot h} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Substituindo (4.10) em (4.9) tem-se:

$$\sigma_{\text{rad}} = \frac{2}{\pi \cdot h} \frac{1}{|\overline{\text{He}}_1(h, \cosh \mu)|} \quad (4.11)$$

Da mesma forma usada no item anterior, pode-se obter a eficiência de radiação normalizada sob a forma:

$$\sigma_{\text{rad}} = \eta_{\text{rad}} \left(\frac{\rho_m}{\rho} \right) \left[1 - \frac{a_i b_i}{ab} \right] = \frac{2}{\pi \cdot h} \frac{1}{\text{He}_1(h \cdot \cosh \mu)} \quad (4.12)$$

A obtenção da eficiência de radiação, para os dois casos particulares, o anel elíptico pulsante (4.2) e o anel elíptico oscilante (4.3), utilizando o programa MATHCAD 5.0, será apresentado no próximo item (4.4), a partir da utilização dos resultados do modelo matemático obtido pelas expressões 4.6 e 4.12 e dos dados de entrada da tabela 4.1.

No ANEXO IV, estão contidos os parâmetros utilizados na geração das malhas para a análise modal no programa ANSYS 5.0 e sua utilização no programa SYSNOISE 5.1.

Parâmetro	valor
a- semi eixo maior	a = 1.0m
b- semi eixo menor	b = 0.5m
h- variavel da função	h = 0.1.....1.8
\bar{h} parâmetro geométrico	$\bar{h} = 0.866$
k_0 - número de onda	$k_0 = 10.833$
ω_1 -frequência inferior	$\omega_1 = 1\text{Hz}$
ω_2 -frequência superior	$\omega_2 = 250\text{ Hz}$
c-. velocidade do som	c = 343 m/s

Tabela 4.1: dados de entrada para os modelos matemático.

4.4 CÁLCULO DA EFICIÊNCIA ATRAVÉS DO SOFTWARE APLICADO À FORMA MATEMÁTICA.

4.4.1 ANEL ELÍPTICO PULSANTE

Utilizando a expressão 4.6 (a eficiência de radiação de um cilindro elíptico pulsante na forma normalizada) obteve-se, através do software MATHCAD 5.0, a eficiência de radiação apresentada na figura 4.1.

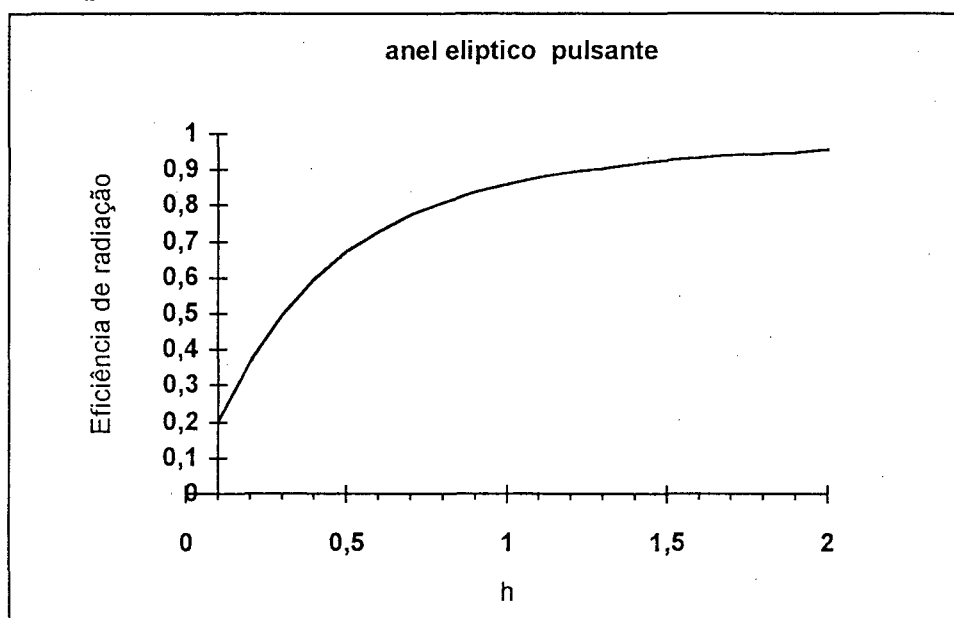


figura 4.1: Eficiência de radiação normalizada de um anel elíptico (2D) em modo pulsante.

4.4.2 ANEL ELÍPTICO OSCILANTE

Utilizando-se da expressão 4.12 obteve-se a eficiência de radiação de um anel elíptico (2D) apresentada na figura 4.2.

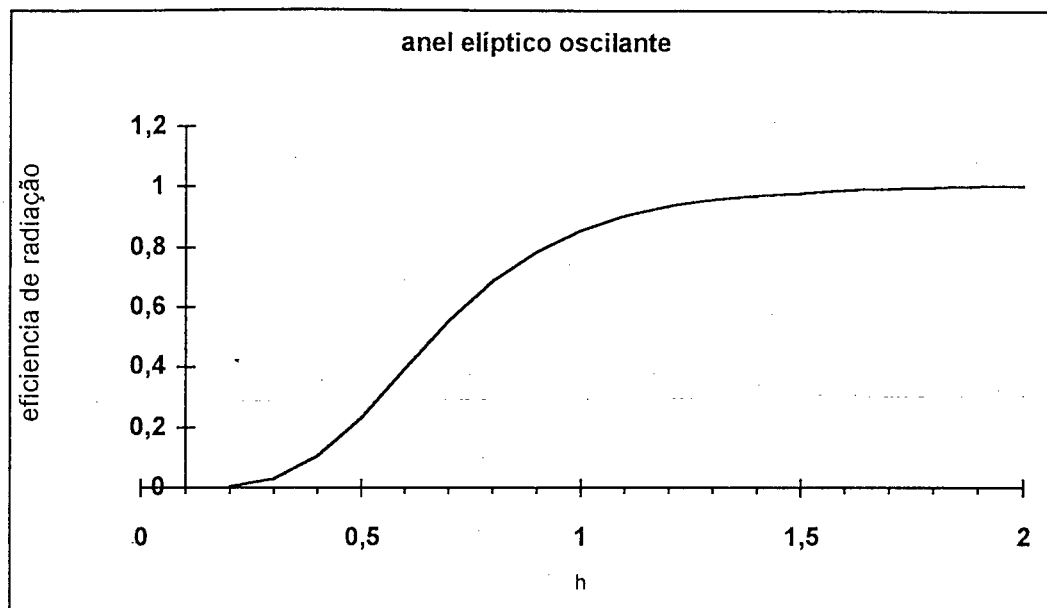


Figura 4.2 Eficiência de radiação normalizada para um anel elíptico (2D) em modo oscilante.

4.5 CÁLCULO DA EFICIÊNCIA DE RADIAÇÃO ATRAVÉS DOS SOFTWARES APLICADOS A ELEMENTOS FINITOS E ELEMENTOS DE CONTORNO

Utilizando os programas ANSYS 5.0 e SYSNOISE 5.0 se obterá a eficiência de radiação para os dois casos particulares, anel pulsante e anel oscilante.

Para que se possa comparar com resultados obtidos pela formulação matemática apresentada nos itens anteriores, serão mantidos os mesmos dados de entrada nos programas para os aneis elípticos mostrados no quadro 4.1.

Parâmetro	valor
a (semi eixo maior)	1.0 m
b (semi eixo menor)	0.5 m
EXY (Modulo de elasticidade)	$21e^{10}$ N/m ²
NUXY (Coefic. de Poisson)	0.29
Dens (densidade)	7700 kg/m ³

Quadro 4.1: Parâmetros e valores utilizados no programa
ANSYS 5.0

Neste item será apresentada a eficiência de radiação a partir de dois programas:

1) ANSYS 5.0 para a geração da malha e o cálculo dos modos de vibração (vide Anexo IV).

2) SYSNOISE 5.0 para o cálculo da eficiência de radiação para os dois casos particulares em estudo, o anel pulsante e o anel oscilante (vide anexo IV).

A malha que representa o modelo no estudo da análise modal foi gerada através do ANSYS 5.0 com 76 elementos, respeitando a restrição imposta pelo número de elementos disponíveis por este programa educacional.

O cálculo da eficiência de radiação foi determinado através do programa SYSNOISE 5.0 onde a restrição estabelece que haja no mínimo 6 elementos por comprimento de onda para se ter confiabilidade nos resultados, limitando portanto, uma frequência superior próxima a 250 Hz, ou em termos da variável h ($h \leq 1.8$). A melhor opção oferecida para a geração do modelo foi a partir do elemento tipo viga (beam3), com axissimetria (vide Anexo IV).

4.5.1 Eficiência de radiação para os anéis elípticos pulsante e oscilante através do software SYSNOISE.

Os resultados obtidos para a eficiência de radiação para o anel elíptico pulsante e oscilante são mostrados nas figuras 4.3 e 4.4.

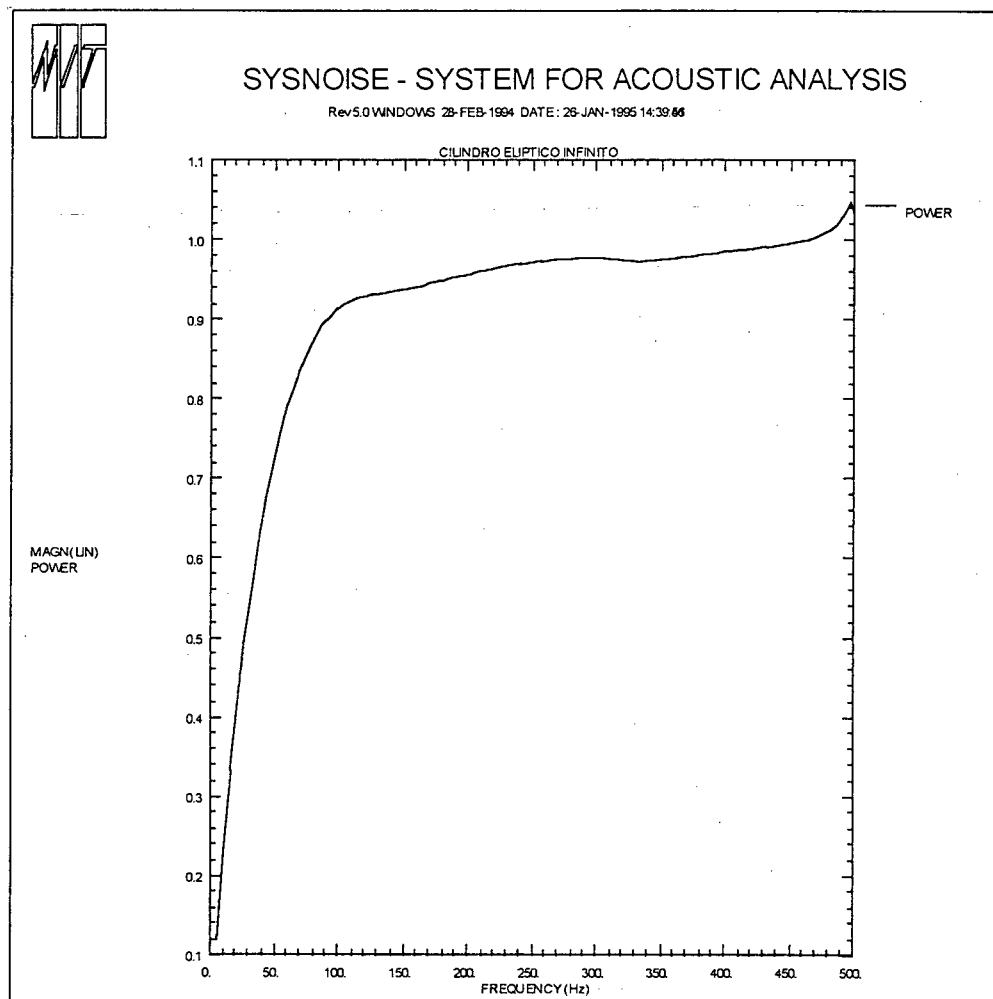


Figura 4.1: Eficiência de radiação de um anel elíptico pulsante obtidos através dos softwares (ANSYS 5.0 e SYSNOISE 5.0).

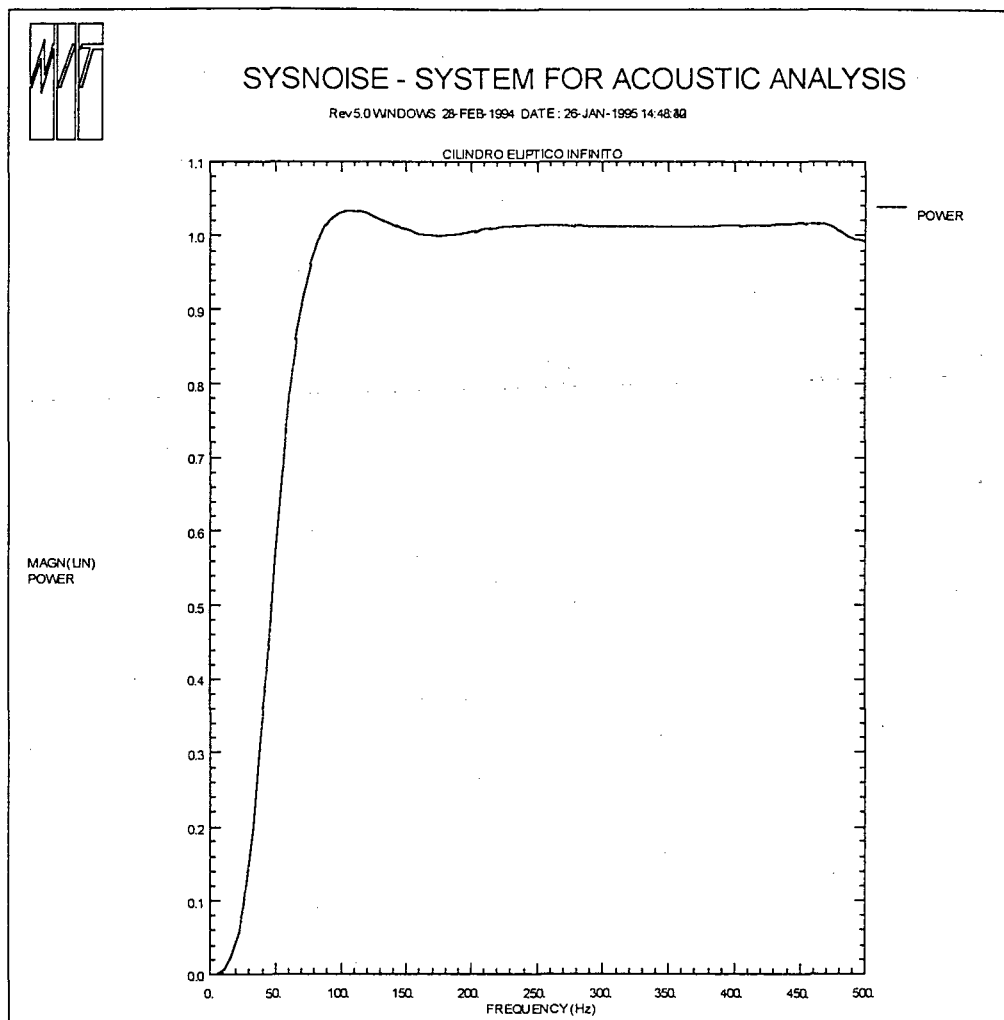


Figura 4.2: Eficiência de radiação de um anel elíptico oscilante obtidos através dos softwares (ANSYS 5.0 e SYSNOISE 5.0).

4.6 CÁLCULO DA EFICIÊNCIA DE RADIAÇÃO ATRAVÉS DOS DOIS MÉTODOS DESENVOLVIDOS NOS ITENS 4.1 e 4.2.

As Figuras, 4.3 e 4.4 apresentam o cálculo da eficiência de radiação de um anel elíptico em modo pulsante e oscilante cujo eixo maior (a) é igual a 1m e eixo menor (b) igual a 0.5m.

O cálculo foi executado sob duas formas:

- 1 - Eficiência de radiação através do modelo matemático desenvolvido no capítulo três.
- 2 - Eficiência de radiação usando os softwares, ANSYS 5.0 e SYSNOISE 5.0.

A figura 4.3 mostra a comparação entre a eficiência de radiação de um anel elíptico pulsante obtida por:

1) O modelo matemático através da equação (3.3.19) com sua computação numérica obtida pelo software MATHCAD 5.0.

2) O modelo obtido pelo método numérico a partir do software ANSYS 5.0 e respectiva eficiência usando elemento de contorno, obtida pelo software SYSNOISE 5.0.

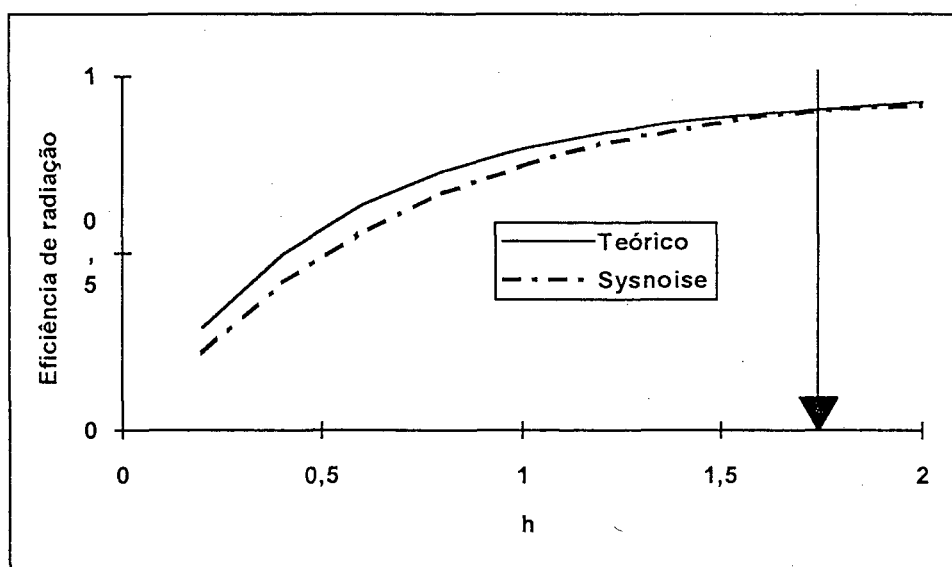


Figura 4.3: Cálculo da eficiência de um anel elíptico em modo pulsante.

Os resultados obtidos analítica e numericamente, demonstram concordância sempre que se observar os seguintes limites impostos por cada programa:

- a) O programa ANSYS 5.0 limita o número máximo de elementos disponíveis (de acordo com a versão utilizada) para a geração da malha.
- b) O limite imposto pelo número de elementos do SYSNOISE 5.0 para a frequência superior e o modelo.
- c) O cálculo através dos valores utilizados pela limitação das funções de Mathieu e respectivos coeficientes leva a ter-se $h \leq 1,8$, ou se levar em consideração o domínio da frequência e os parâmetros geométricos envolvidos a frequência superior é em torno de 250Hz para os casos em estudo.

A figura 4.4 mostra a comparação entre a eficiência de radiação de um anel elíptico oscilante obtida para:

- 1) O modelo matemático através da equação (3.4.13) com sua computação numérica obtida pelo software MATHCAD 5.0.
- 2) O modelo obtido pelo método numérico a partir do software ANSYS 5.0 e respectiva eficiência usando elemento de contorno obtida pelo software SYSNOISE 5.0.

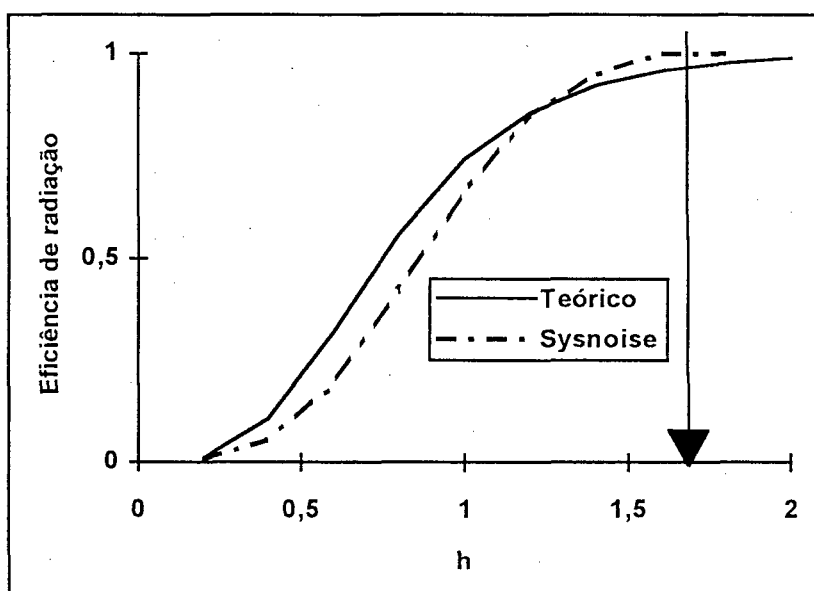


Figura 4.4: Cálculo da eficiência de radiação de um anel elíptico em modo oscilante

Os resultados obtidos analítica e numericamente, demonstram concordância sempre que se observar os seguintes limites impostos por cada programa:

a) O programa ANSYS 5.0 limita o número máximo de elementos disponíveis (de acordo com a versão utilizada) para a geração da malha.

b) O limite imposto pelo número de elementos do SYSNOISE 5.0 para a frequência superior e o modelo.

c) O cálculo através dos valores utilizados pela limitação das funções de Mathieu e respectivos coeficientes leva a se ter $h \leq 1.8$ ou se levar em consideração o domínio da frequência e os parâmetros geométricos envolvidos a frequência superior é em torno de 250hz para os casos em estudo.

Nota-se que os resultados da eficiência de radiação sonora mostrados nas figuras 4.1 a 4.4 mostram valores que variam de 0.001, nas baixas frequências, a valores unitários, em altas frequências, mostrando coerência com os valores esperados, pois é fato que para qualquer tipo de estrutura, a eficiência de radiação tende para um valor unitário nas altas frequências.

4.7 COMPARAÇÃO DE RESULTADOS

Este item apresentará os resultados da eficiência de radiação obtida através de outros modelos matemáticos desenvolvidos por alguns autores, e a eficiência de radiação obtida pelo modelo matemático em forma fechada apresentado neste trabalho.

Nos casos estudados foi mantida a seguinte faixa de valores para as variáveis das funções:

(1) - $h \leq 1.8$, o limite imposto pela formulação das funções radiais de Mathieu e respectivos coeficientes.

(2) - $\mu = 0.1$, O valor usado pelo trabalho nas comparações para a função cosseno hiperbólico.

4.7.1 COMPARAÇÃO ENTRE O ANEL CILÍNDRICO E O ANEL ELÍPTICO.

Os resultados obtidos por Pinto [7] para a eficiência de radiação de um cilíndrico infinito serão utilizados para a comparação utilizando as seguintes transformações:

(1) - O cilindro infinito será transformado em um anel cilindro (2D) desconsiderando o eixo z e, conseqüentemente, o número de flexão na direção axial, k_z .

(2) - Utilizando as transformações matemáticas através de McLachlan [18] no argumento da função de Mathieu combinada, obtido pelo modelo matemático, é possível chegar aos argumentos das funções de Hankel. A figura 4.5 fornece todos os parâmetros para a transformação.

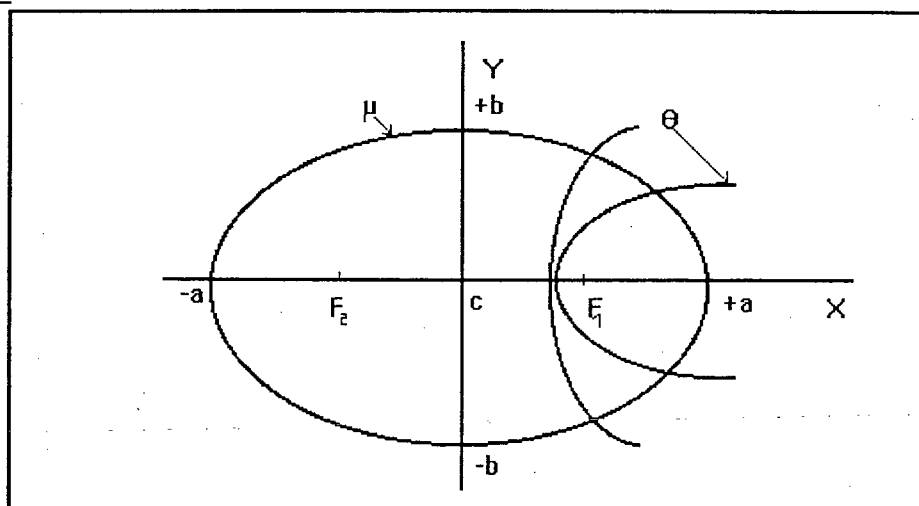


Figura 4.5: Representação das coordenadas elípticas

De acordo com a figura 4.5 tem-se:

1 - Nos extremos do eixo maior da elipse (+a,-a):

$$\mu = 0, \pi \text{ e } y=0.$$

$$X = \bar{h} \cdot \cosh \mu = \pm a.$$

2 - Nos extremos do eixo menor da elipse (+b,-b):

$$\mu = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \text{ e } X=0$$

$$Y = \pm \bar{h} \cdot \sinh \mu = \pm b$$

Usando a relação:

$$\bar{h} = a \cdot e$$

(4.4.1)

onde,

\bar{h} = distância do centro ao foco

a = semi eixo maior

e = excentricidade

Quando a= constante, se $e \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow \infty$, o produto:

$$\bar{h} \cdot \cosh \mu \rightarrow a$$

(4.4.2)

A relação (4.4.2) acima afirma que o produto tende para um valor constante que corresponde ao semi eixo maior e assim a elipse tende para um círculo de raio a (figura 4.6); por conseguinte, o argumento da função combinada de Mathieu pode ser substituído pelo argumento da função de Hankel como é mostrado na expressão 4.4.2.

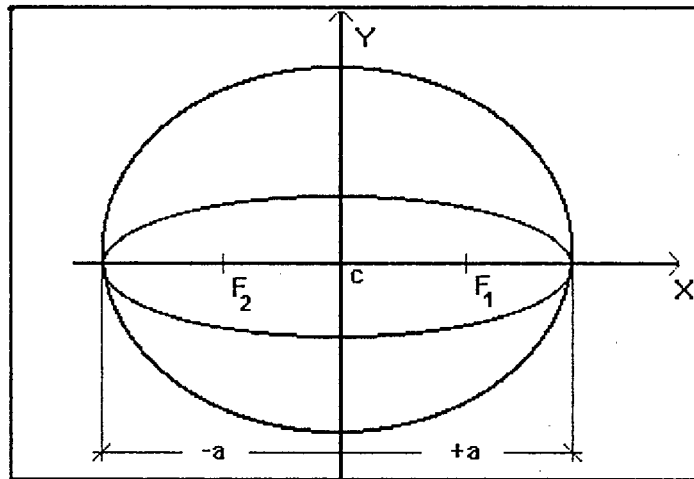


Figura 4.6: Representação da elipse e cilindro concêntricos.

A figura (4.7) representa a eficiência de radiação para:

- 1) Um anel elíptico em modo pulsante gerado a partir das funções de Mathieu obtidas neste trabalho.
- 2) Um anel circular em modo pulsante gerado a partir das equações de Hankel obtidas por Pinto [7].
- 3) Um anel intermediário entre o circular e o elíptico gerados a partir das equações de Mathieu.

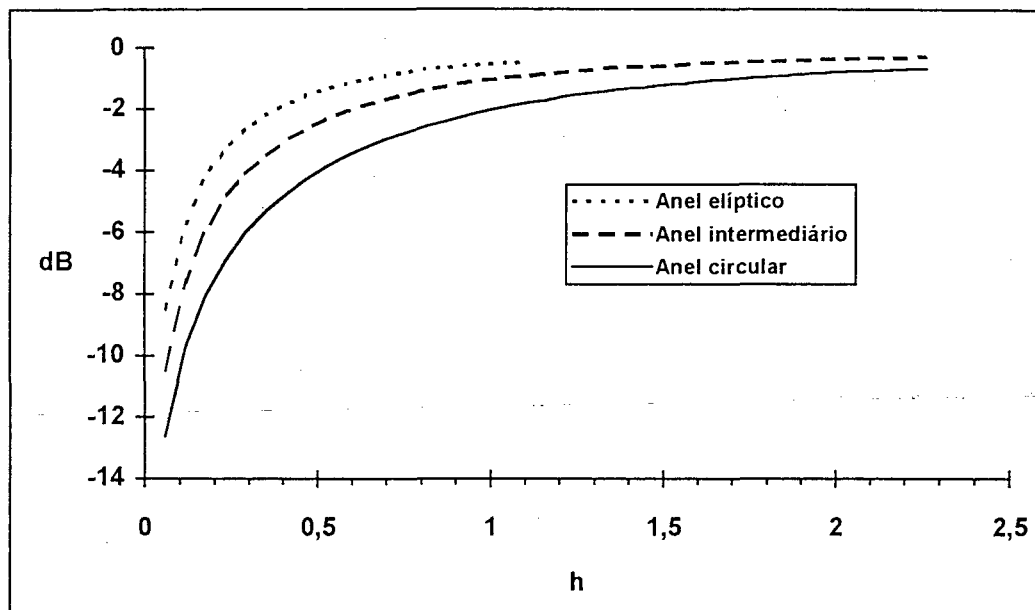


Figura 4.7: Eficiência de radiação de um anel cilíndrico.

No eixo das abcissas está o parâmetro h , que relaciona o número de onda k_0 e os parâmetros geométricos, isto é:

$$\bar{h} = h_1 = \sqrt{a^2 - b^2}, \text{ para o anel elíptico}$$

$$\bar{h} = h_2 = a, \text{ para o anel cilíndrico}$$

Portanto, $h = h_1 \cdot k_0$, para o anel elíptico e $h = h_2 \cdot k_0$, para o anel cilíndrico.

O resultado exibe uma boa concordância pois ambos apresentam a mesma semelhança na forma geométrica da curva de radiação e, por conseguinte, variando o argumento da função de Mathieu radial combinada é possível chegar a função de Hankel (vice-versa), como previsto pela teoria.

A figura (4.8) representa a eficiência de radiação para:

1) Um anel elíptico em modo oscilante gerado a partir das funções de Mathieu obtidas neste trabalho;

2) Um anel circular em modo oscilante gerado a partir das equações de Hankel obtidas por Pinto [7];

3) Um anel intermediário entre o circular e o elíptico.

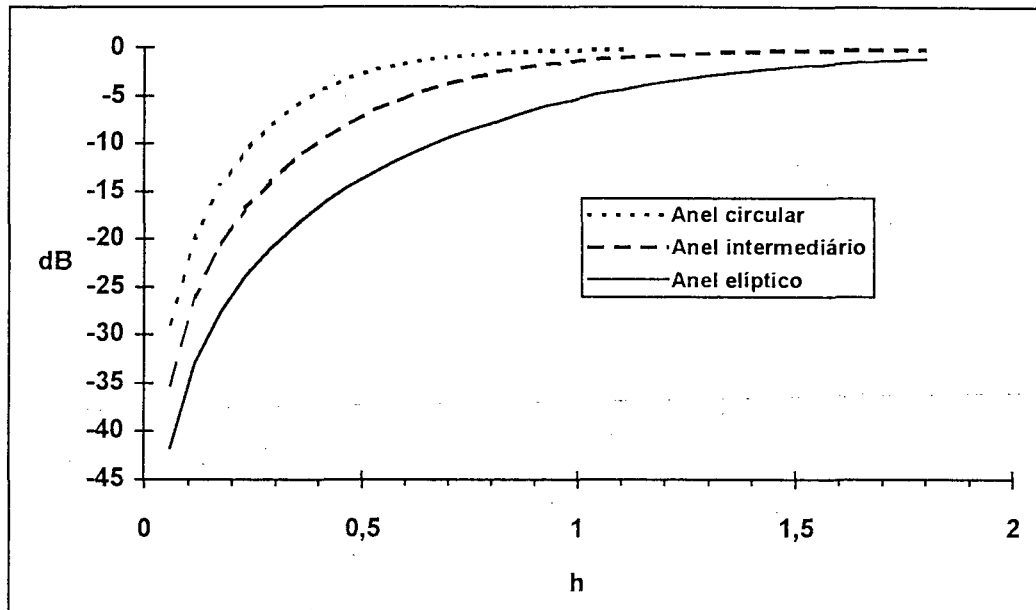


Figura 4.8: Eficiência de radiação anel cilíndrico x anel elíptico em modo oscilante .

No eixo das abscissas está o parâmetro h , que está relacionado número de onda k_0 e o parâmetro h (ligado a forma geometria de cada anel), isto é:

$$\bar{h} = h_1 = \sqrt{a^2 - b^2}, \text{ para o anel elíptico}$$

$$\bar{h} = h_2 = a, \text{ para o anel cilíndrico}$$

Portanto, $h = h_1 \cdot k_0$, para o anel elíptico e $h = h_2 \cdot k_0$, para a anel cilíndrico.

O resultado apresentado também exibe uma boa concordância pois ambos apresentam a mesma semelhança na forma geométrica de radiação e o modelo anel cilíndrico apresenta melhor radiação em toda faixa de variação do parâmetro h , para estes modelos estudados.

4.7.2 Comparação entre as tiras oscilantes

C.E. Wallace [28] (vide Anexo V) publicou em 1970 um trabalho onde é abordada a eficiência de radiação teórica para um painel retangular, simplesmente apoiado, através dos modos de vibrações pares e ímpares.

Wallace trabalha com a resistência de radiação correspondente aos modos vibração de um painel retângular simplesmente apoiado onde o número de onda acústico é normalizado em relação ao número de onda da placa sob a forma:

$$\gamma = \frac{k}{k_p} \text{ onde } k \text{ é o número de onda acústico e } k_p \text{ é o número de}$$

onda da placa

$$k_p^2 = \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]$$

A figura 4.9 mostra a comparação entre o resultado obtido por Wallace [28] utilizando sua forma simplificada para a eficiência de radiação cujo valores utilizados para a comparação no intuito de se ter o modelo placa de Wallace em forma de tira, foram:

Parâmetro	Valor
comprimento (m)	1.00 m
largura (n)	0.63 m

A expressão utilizada por Wallace tem a forma:

$$S_{mn} \approx \frac{32}{mn\pi^3} \left(\frac{an}{mb} + \frac{mb}{an} \right) \gamma^2 \left\{ 1 - \left[\left(1 - \frac{8}{(m\pi)^2} \right) \frac{a}{b} \right] \left(\frac{an}{mb} + \frac{mb}{an} \right) \frac{mn\pi}{12} \gamma^2 \right\}$$

onde:

$$\gamma = \frac{k}{k_p}$$

m e n são os modos de vibração em cada direção

a e b são as dimensões do painel

O resultado obtido pelo modelo teórico para uma tira vibrante de mesmas dimensões, onde o valor máximo permitido em relação ao erro é indicado pela seta.

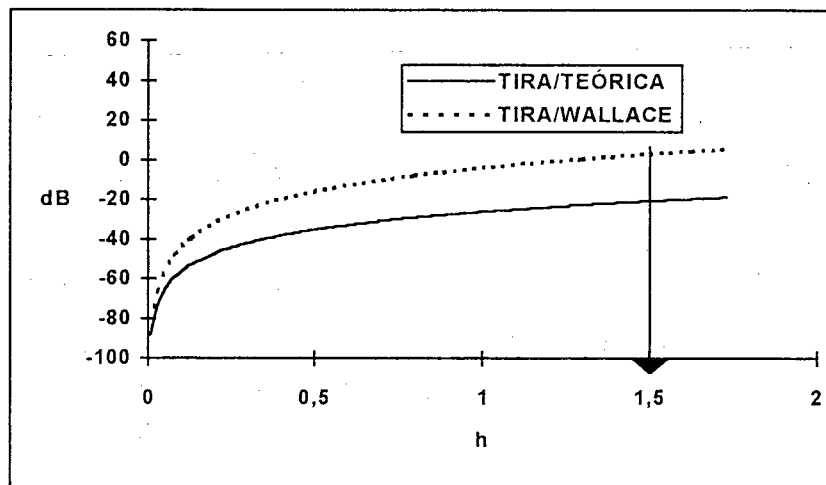


Figura 4.9: Comparação entre os resultados obtidos pelo modelo matemático desenvolvido neste trabalho e os valores obtidos por Wallace.

Utilizando os valores obtidos por cada aproximação no intuito de se obter a maior variação entre os valores de Wallace e os valores teóricos obtidos por este trabalho, pode se observar que a forma das curvas tem similaridade embora se deva observar que:

1) A expressão usada por Wallace é uma forma aproximada, e erros são introduzidos na utilização desta aproximação para uma tira oscilante.

2) A expressão obtida para a tira, neste trabalho, é também uma forma aproximada para o caso da tira oscilante a partir do método simplificado por Feshbach [17].

4.7.3 Comparação entre tira teórica pulsante e viga teórica pulsante

H. Feshbach [17] desenvolveu, várias aproximações para as funções de Mathieu radiais partindo da variável $\mu = 0$, levando, portanto, a se poder obter, através dessas funções, a eficiência de radiação para uma viga pulsante.

A figura 4.10 mostra os resultados obtidos para a eficiência de radiação teórica de uma viga pulsante obtida através das equações mostradas por Feshbach [17], e uma tira pulsante obtida pelo modelo matemático.

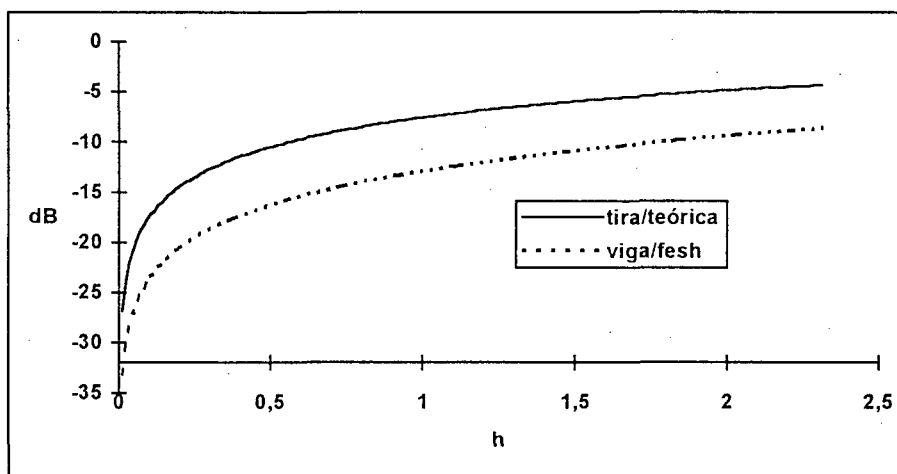


Figura 4.10: Comparação entre tira teórica e viga obtida por Feshbach

Utilizando os valores obtidos por cada aproximação no intuito de se obter a maior variação entre os valores de Wallace e os valores teóricos obtidos por este trabalho, pode se observar que a forma das curvas têm similaridade embora se deva observar que:

1) A expressão usada por Wallace é uma forma aproximada, e erros são introduzidos na utilização desta aproximação para uma tira pulsante.

— 2) A expressão obtida para a tira, neste trabalho, é também uma forma aproximada para o caso da tira pulsante a partir do método simplificado por Feshbach [17].

CAPÍTULO 5.0

5.0 RESUMO E CONCLUSÕES

5.1 RESUMO

Estruturas submersas têm o fluido circundante acomodando-se ao movimento desta estrutura através do efeito da massa adicionada (não considerado nessa análise) e da eficiência de radiação.

A revisão bibliográfica, apresentada no capítulo 1.0, revela a não existência de dados em forma fechada e cálculos do parâmetro eficiência de radiação para anéis cilindros elípticos ou cilindros elípticos infinitos, mas somente a determinação dos modos de vibrações de uma membrana elíptica para a região das altas frequências onde ocorrem certos fenômenos físicos cujo resultado estão relacionados à mecânica quântica.

Neste trabalho foi desenvolvida uma expressão, de forma fechada, para a eficiência de radiação de um anel elíptico em modos simples partindo-se da equação da onda aplicando-se as duas condições de contorno.

A partir da solução da equação da onda em coordenadas elípticas (equação 2.1.5) e considerando um anel elíptico cuja velocidade normal superficial, (equação 2.1.13) foi possível obter a equação para a pressão acústica em coordenadas elípticas. Do valor médio temporal e espacial do produto da pressão acústica pela velocidade superficial (3.2.4) obtém-se a potência acústica para um anel elíptico em modo pulsante (3.3.10) e modo vibrante (3.4.10).

Através dos resultados para a potência acústica se tem a eficiência de radiação para os dois casos particulares (3.3.19) e (3.4.13) e o cálculo numérico obtido através dos softwares (ANSYS 5.0, SYSNOISE 5.0 e

MATHCAD 5.0) que possibilitou a comparação com outras formas geométricas desenvolvidas por Wallace [28], Pinto [7] e Feshbach [17].

5.2 CONCLUSÕES

A partir do modelo matemático foi possível gerar a eficiência de radiação. Inicialmente esse modelo foi comparado com os resultados obtidos através do método de elementos finitos e elementos de contorno.

Os resultados gerados analítica e numericamente, demonstram uma concordância desde que se observe os limites impostos por cada programa no que se refere ao número máximo de elementos disponíveis e a frequência máxima permitida (a relação é que se tenha 6 elementos (nós) no mínimo para um comprimento de onda).

Inicialmente as comparações foram realizadas em relação aos dois modelos aplicando-se o modelo matemático e o modelo gerado pelos softwares.

A figura 4.5 e 4.6 mostram a comparação dos resultados para os anéis elípticos em modo pulsante e oscilante.

O próximo passo foi comparar o modelo matemático com os resultados obtidos por Pinto [7] para a eficiência de radiação de um cilindro infinito. Esta comparação foi possível transformando o cilindro infinito em um anel cilíndrico através da eliminação do eixo z do cilindro e consequentemente o número de onda estrutural k_z e, escrevendo a equação da onda para duas dimensões (2D).

Os resultados mostram que há concordância nos modelos como é mostrado nas figuras 4.7 e 4.8.

Caminhando em uma outra direção, esse novo passo irá testar o modelo matemático quando se deseja determinar a eficiência de radiação para uma forma geométrica denominada tira.

Wallace [28] obteve resultados para a resistência de radiação trabalhando com painéis retangulares vibrantes. A partir do modelo matemático para a potência sonora, foi possível considerar o caso especial da tira, bastando modificar uma das dimensões do painel.

Das mesmas dimensões utilizadas no modelo de Wallace obteve-se o resultado para a eficiência de radiação do modelo matemático para uma tira.

A figura 4.9 mostra concordância entre os dois modelos. O teste só pode ser realizado para uma tira oscilante pois Wallace não previu, em seu modelo matemático, resultados para a forma pulsante.

Partindo da aproximação do modelo matemático proposto neste trabalho, foi possível comparar com os resultados obtidos por Feshbach [17] assim como os resultados obtidos por Blake, [7] já que os dois usaram o mesmo tipo de aproximação no desenvolvimento da expressão para a pressão acústica e a eficiência de radiação.

Feshbach [17] determinou uma aproximação para as funções de Matheiu em um caso especial, fazendo com que a elipse tenda para zero ($\mu \rightarrow 0$) e obtendo uma série de valores aproximados, para essas funções, que podem ser usadas na determinação da pressão acústica para o modelo tipo viga que se encontra apoiada sobre o eixo maior da elipse.

Usando o mesmo modelo aproximado Blake [7] obteve uma expressão para a potência acústica de uma viga em campo livre.

A figura 4.10 mostra os resultados obtidos entre o modelo teórico e o modelo de Feshbach.

Embora se tenha determinado os valores para os dois modelos, essa formulação pode ser estendida para outros casos usando o modelo elíptico.

Os trabalhos futuros serão gerar a eficiência de radiação para os modos de vibrações superiores do anel elíptico usando o mesmo modelo obter valores para as seguintes formas:

- (1) Cilindro elíptico infinito
- (2) Cilindro elíptico finito

É conveniente salientar que, nos caso em estudo, foi levado em consideração que esses modelos foram gerados, em função das limitações dos softwares disponíveis. Assim para os próximos trabalhos, será necessário estender os mesmos resultados obtidos pelos softwares porém com maior capacidade de programação.

A área de atuação desse trabalho não se restringe somente ao estudo de formas geométricas onde os cascos de submarinos e navios tem a forma elíptica, mas existe outras seções tais como:

- Modelagem da fuselagem de aeronaves
 - Modelagem de altofalantes
 - Modelagem de vários tipos de tubulações
 - Modelagem de vários tipos de fontes comerciais e industriais,
- onde esse modelo tem aplicabilidade.

REFERÊNCIAS

- [1] Yoursi Gerges S.N., The International Conference in Noise Control Engineering Warsovia, Polonia, set, 1979. Structure-acoustic Interaction in an Enclosure.
- [2] Yoursi Gerges S.N. e Fahy F.J., Journal of Sound and Vibration, 53(3),441-452, 1977. Distorted Cylindrical Shell Response to Internal Acoustic Excitation Below the Cut-off-Frequency.
- [3] Yoursi Gerges S.N. e Fahy F.J. Simpósio Brasileiro de Tubulações e Vasos de Pressão, Salvador, BA, Brasil. Nov. 1980. Resposta de Cascas a um Campo Sonoro Interno Acima da Frequência de Corte.
- [4] Yoursi S.N. e Pinto J.C., 4º Congresso Brasileiro em Engenharia e Ciência dos Materiais, UFSC, Santa Catarina, Dezembro 1980.
- [5] Yoursi S.N. e Fahy F.J., Journal of Sound and Vibration 26,437-439, 1973 Sound Radiation from Transversely Vibrating Unbaffled Beams.
- [6] Blake W.K., Journal of Sound and Vibration 33, 427-450, 1973, The Radiation from Free-Free Beams in Air and in Water.
- [7] Pinto J.C.S., tese de mestrado, Engenharia Mecânica. Universidade Federal de Santa Catarina 1980, Radiação acústica de cascas cilíndricas.
- [8] Morse P.M. e Ingard K.U., 1968. Theoretical Acoustics. McGraw Hill Book Company
- [9] Junger M.C., Journal of the Acoustical Society America, 1952, 24(3), 288-289. Radiation Loading of Cylindrical and Spherical Surfaces.
- [10] Robey D.H., Journal of the Acoustical Society America, 1955,27(4), 706-710, On Radiation Impedance of an Array of Finite Cylinders
- [11] Maningad J.E e Maidanik G., Journal of the Acoustical Society America , 1964, 36(9) 1961-1968. Radiation Properties of Cylindrical Shells.
- [12] Yoursi Gerges S.N., tese de doutorado (Ph.D.), Institute of sound and vibration research, University of Southampton, 1974, Acoustic Interaction between transverse vibration of slender beams and a bound surrounding fluid.

- [13] Yoursi S.N. e Fahy F.J, Journal of Sound and Vibration, 1975, 4 299-306. Acoustic Radiation by Unbaffled Cylindrical Beams in Multi-Modal Transverse Vibration.
- [14] Lyon R.H. e Maidanik G, Journal of the Acoustical Society America, 1962, 34, 623-639. Power Flow between Linearly Coupled Oscillators.
- [15] Maidanik G., Journal of the Acoustical Society America, 1962, 34, 809-820, Response of Ribbed Panels to Reverberant Acoustic Fields.
- [16] Jeyapalan R.K., Journal of Sound and Vibration, 1979, 67, 55-67, Radiation Efficiencies of Beams in Flexural Vibration
- [17] Feshbach H. e Morse P. , Methods of Theoretical Physics., Mc.Graw Hill Books company, 1953, Parte I e Parte II.
- [18] McLachlan N.W., theory and Application of Mathieu Functions, Dover Publications 1964.
- [19] Morse P.M., Vibration and Souns McGraw-Hill book company 1948
- [20] Gerges S. N Y., Ruído Fundamento e controle, Universidade Federal de Santa Catarina. 1992.
- [21] Ince E. L., Proceedings Royal Society, Edinburgh, 1925, 20-29, Researches into the Characteristic Numbers of the Mathieu Equation.
- [22] Ince E. L., Proceedings Royal Society Edinburgh, 1925, 294-301, Researches into Characteristic Numbers of the Mathieu Equation.
- [23] Ince E.L., Proceedings Royal Society Edinburgh, 1926, 316-322, Researches into the Characteristic Numbers of the Mathieu Equation.
- [24] Ince E.L., Proceedings Royal Society Edinburgh, 1931, 355-423, Tables of the Elliptic-cylinder Functions.
- [25] Ince E.L., Proceedings Royal Society Edinburgh, 1931, 424-433, Zeros and Turning Points of the Elliptic-cylinder Functions.
- [26] Barakat R., Journal of Sound and Vibration 1976, 201-244, Power Expansions of Mathieu Functions Tables of Numerical Results.
- [27] Abramowitz M., Handbook of Mathematical Functions 1964

- [28] Wallace C.E., Journal of Acoustics of Society America 1970, 946-952, Radiation Resistance of a Rectangular Panel.
- [29] Richards E.J. and Jeyapalan R.K., Journal of Sound and Vibration 1979, 419 - 451, On Prediction Of Impact Noise II: Ringing Noise.
- [30] Chen G. et al., Journal Society Industrial and Applied Mathematics 1994, 454-469 Visualization Of Special Eigenmodes Shapes of a Vibrating Elliptical Membrane.
- [31] Hettich, R. Haaren E. Ries M. and Still G. Accurate numerical approximations of eigenfrequencies and eigenfunctions of elliptic membranes. Zamm, 67 (1987) pp. 589-597.
- [32] Raleigh J.W.S., The Theory of Sound 1942., volume I e II.
- [33] Goldstein S., Mathieu function transactions., Cambridge Philosophical Society, 23-33, 1927.
- [34] National Bureau of Standards Tables relating to Mathieu Functions, Characteristic Values and Joining Factors., NBS. 59.
- [35] Cremer L., Heckl M., Ungar E.E., Structure-borne sound, Springer-Verlag., 1973.
- [36] Numerical Integration Technologies N.V., Belgium, Primeira edição, SYSNOISE Rev 5.0, 1993, volumes I, II, III e IV.
- [37] Swanson Analysis Systems., Inc., Houston, ANSYS 5.0, 1993, Volumes I, II, III e IV.

ANEXO I

COORDENADAS ELÍPTICAS

Fator de escala

As coordenadas elípticas são formadas pelo conjunto de elipses e hipérboles confocais (figura 1). Uma mudança de uma escala retangular para uma escala elíptica é realizada através do fator de escala.

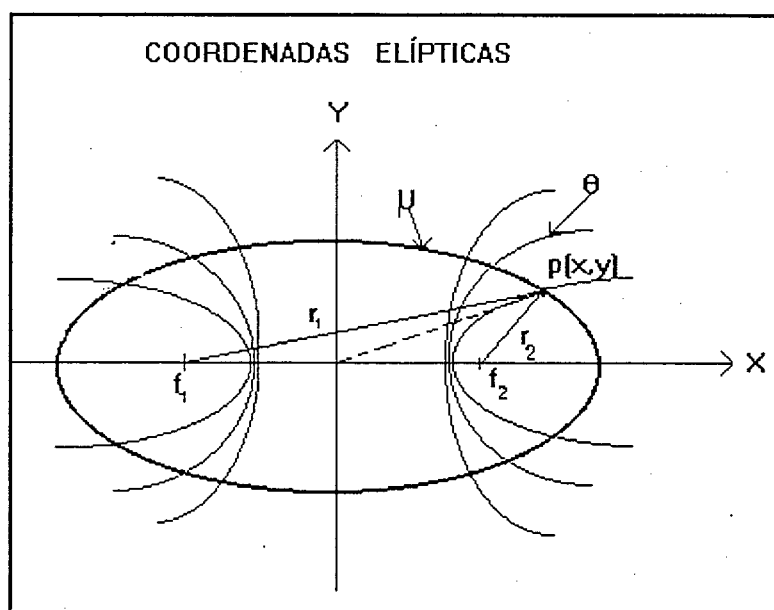


Figura1: coordenadas elípticas contendo elipse e hipérboles confocais

A variação do âelipse constante gerando as hipérboles e, obtendo-se portanto, valores discretos na geração de um conjunto de funções.

Um ponto $P(x,y)$ pode ser determinado por suas coordenadas retangulares $[x,y,z]$ ou coordenadas curvilíneas (u_1, u_2, u_3) onde as equações de transformações de uma série de coordenadas para outra podem ser obtidas através dos fatores de escala.

Se u_2 e u_3 são constantes, então, u_1 varia de acordo com o vetor posição $r = x_i + y_j + z_k$ que descreve uma curva chamada a curva da coordenada u_1 (figura 2).

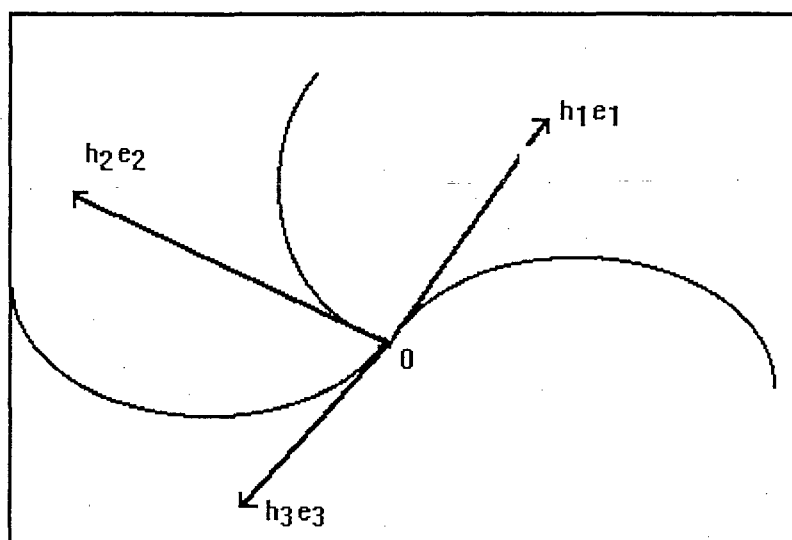


Figura 2: Vetores tangentes as curvas representando o fator escalar de transformação.

Os vetores $\frac{\partial r}{\partial u_1}, \frac{\partial r}{\partial u_2}, \frac{\partial r}{\partial u_3}$ representam os vetores tangentes as curvas.

Fazendo e_1, e_2, e_3 vetores unitários tangentes a curva, obtém-se:

$$\frac{\partial r}{\partial u_1} = h_1 e_1 \quad \frac{\partial r}{\partial u_2} = h_2 e_2 \quad \frac{\partial r}{\partial u_3} = h_3 e_3 \quad \text{onde:}$$

$$h_1 = \left| \frac{\partial r}{\partial u_1} \right| \quad h_2 = \left| \frac{\partial r}{\partial u_2} \right| \quad h_3 = \left| \frac{\partial r}{\partial u_3} \right| \quad \text{são chamados de fatores}$$

escalares. Se e_1, e_2, e_3 são mutuamente perpendiculares, o sistema de coordenadas curvilíneas é chamado de ortogonal.

Para a mudança de escala, é necessário obter o fator h_n (fator mudança de escala). Uma mudança do tipo $d\xi_n$ nessa coordenada produz um deslocamento $h_n d\xi_n$ ao longo da linha da coordenada. Em geral h_n varia de ponto a ponto no espaço.

No sentido de obter h_n em termos de ξ_n é necessário expressar as coordenadas x, y, z em termos das coordenadas ξ_1, ξ_2, ξ_3 .

desde que $h_n d\xi_n$ é um comprimento do deslocamento correspondente a $d\xi_n$ a razão do deslocamento ao longo de ξ_n . Essa quantidade, portanto, é o cosseno diretor. Similarmente se x é expresso em termos de ξ , a taxa de mudança de x devido ao deslocamento $h_n d\xi_n$ será $\frac{1}{h_n} \frac{\partial x}{\partial \xi_n}$.

Deve-se notar que existe uma relação próxima entre as propriedades geométricas das coordenadas e o comportamento das soluções. As propriedades geométricas das coordenadas ξ_1, ξ_2 , por exemplo, são expressas mais claramente pelo fator de escala h_1 e h_2 .

Para uma transformação confocal, os fatores de escala são iguais; e o uso das condições de Cauchy pode mostrar que o fator de escala são iguais a

$$\left| \frac{dz}{d\omega} \right|. \text{ Desde que } \left| \frac{dz}{d\omega} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_1} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_2} \right)^2}, \text{ onde o fator}$$

de escala $h_1 = h_2 = e^{\xi_1} = r$, onde r é o vetor posição.

O fator de escala e o sistema de coordenadas devem ser de forma separáveis tal como:

$$\frac{\partial x}{\partial \mu} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_1} \right) \left(\frac{d\xi_1}{d\mu} \right) \text{ onde o fator de escala deve ser escrito sob a forma:}$$

$$h_\mu = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \mu} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mu} \right)^2} \quad (1)$$

Pela figura 1, as coordenadas elípticas podem ser apresentadas sob a forma:

$$x = \frac{a}{2} \cosh \mu \cos \theta \quad y = \frac{a}{2} \sinh \mu \sin \theta \quad (2)$$

Fazendo a derivada da expressão (2), anterior, se obtém:

$$\frac{\partial x}{\partial \mu} = \frac{a}{2} \sinh \mu \cos \theta \quad \frac{\partial y}{\partial \mu} = \frac{a}{2} \cosh \mu \sin \theta \quad (3)$$

Substituindo a expressão (3) em (1), obtém-se:

$$h_{\mu} = \frac{a}{2} \sqrt{\sinh^2 \mu + \sin^2 \theta} \quad (4)$$

Pôr outro lado se r é uma função vetorial, o gradiente de r será:

$$\text{grad} r = \nabla r = \frac{1}{h_1} \frac{\partial r}{\partial \mu_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial r}{\partial \mu_2} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial r}{\partial \mu_3}$$

Lembrar que $h_1^2 = h_2^2$ e $h_3^2 = 1$.

Impondo as coordenadas do sistema pode-se rescrever:

$$h_{\mu} = h_{\theta} \text{ e } h_{\mu} = \frac{a}{2} \sqrt{\sinh^2 \mu + \sin^2 \theta}$$

$$r = \frac{h}{2} \sqrt{\cosh^2 \mu - \sin^2 \theta}, \quad r_1 = \frac{h}{2} (\cosh \mu + \cos \theta) \text{ e } r_2 = \frac{h}{2} (\cosh \mu - \sin \theta)$$

Na figura (2.1) observa-se que:

$r \rightarrow$ distância do ponto $P(x,y)$ à origem

$r_1 \rightarrow$ distância ao foco da direita

$r_2 \rightarrow$ distância ao foco da esquerda

Através de uma transformação confocal, pode-se manter os fatores de escalas. Utilizando as transformações de Cauchy, se tem o sistema de coordenadas elípticas.

ANEXO II

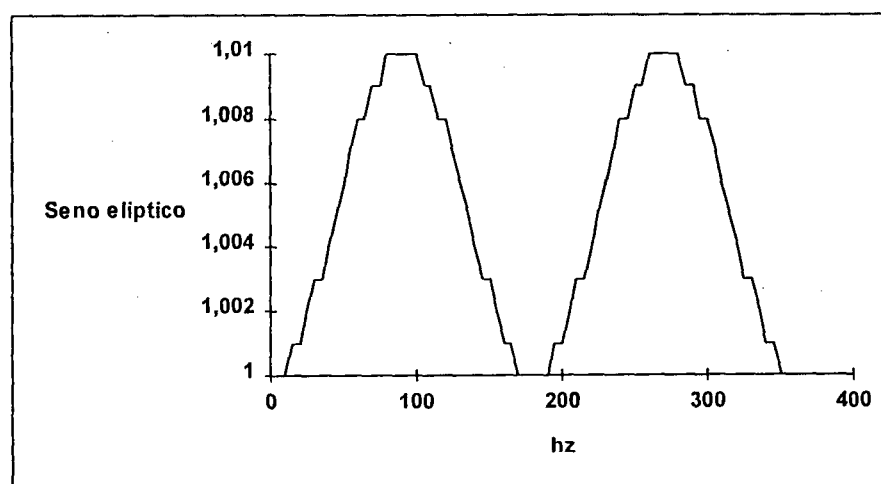
Funções periódicas de Matheiu

As funções periódicas de Mathieu foram geradas a partir das formulas utilizadas por Feshbach [17] e Barakat [26] utilizando o software MATHCAD 5.0.

2.1 Função Seno elíptico par de periodo 2π e de ordem zero.

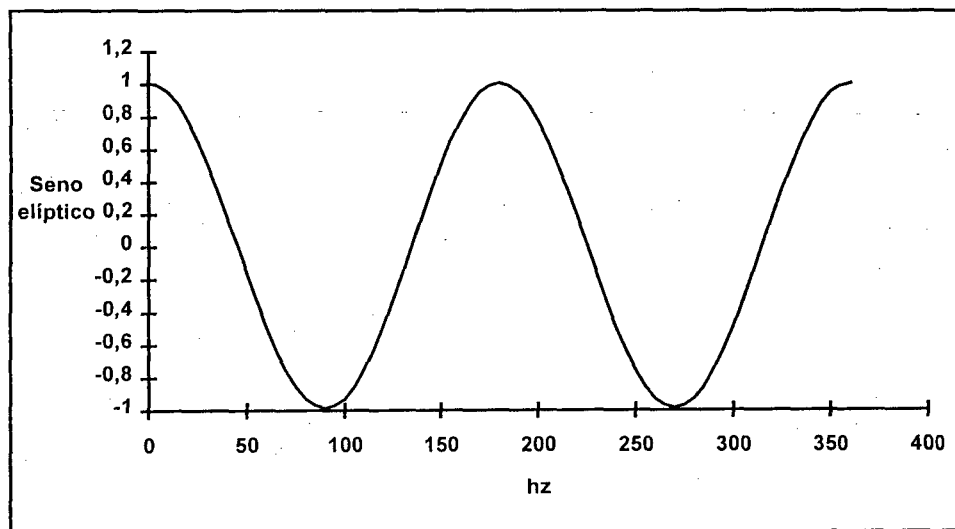
$$Ce_0(h, \cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} De_{2n}^0(h) \cos(n\theta)$$

$$Ce_0(h, \cos \theta) = D_0^0(h) + D_2^0(h) \cos 2\theta + D_4^0(h) \cos 4\theta + D_6^0(h) \cos 6\theta + \dots$$



2.2 Função Seno elíptico par de período 2π e de primeira ordem.

$$Ce_1(h, \theta) = De_1^1(h) \cos \theta + De_3^1(h) \cos 3\theta + De_5^1(h) \cos 5\theta + \dots$$



2.3 Função Seno elíptico par de período 2π e de ordem zero.

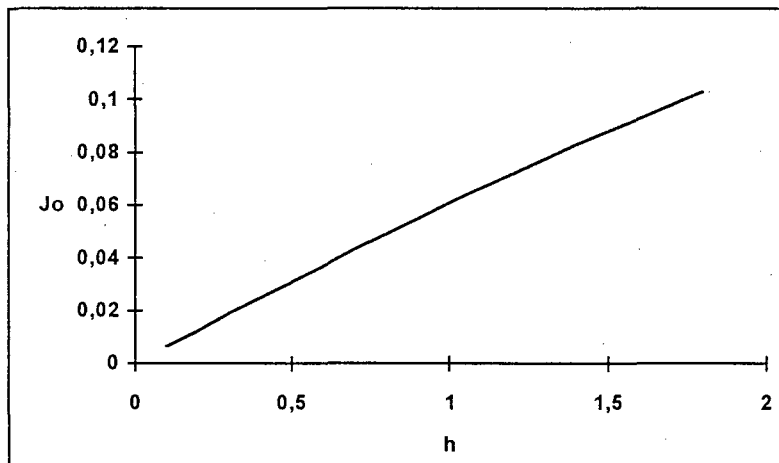
$$Se_0(h, \sin \theta) = D_0^0(h) + D_2^0(h) \sin 2\theta + D_4^0(h) \sin 4\theta + D_6^0(h) \sin 6\theta + \dots$$

ANEXO III

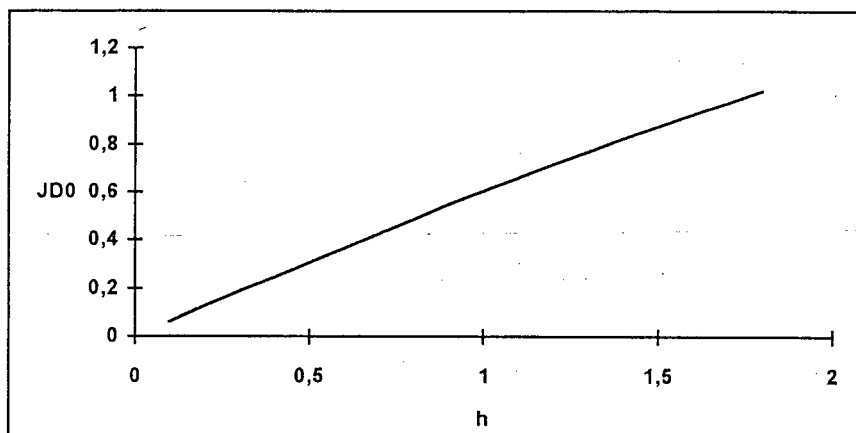
Funções radiais de Mathieu

As funções de Mathieu apresentadas por Feshbach [17], foram desenvolvidas através do software MATHCAD 5.0 e apresentadas da mesma forma que foram usadas no desenvolvimento de cada modelo.

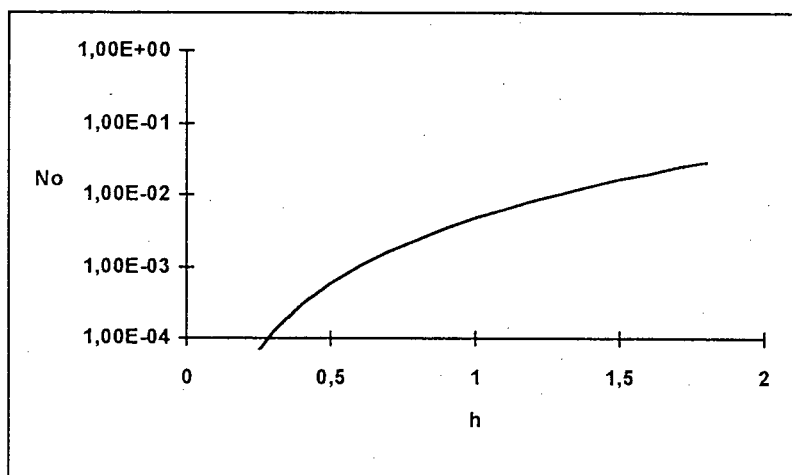
3.1 Função radial de Mathieu de primeiro tipo de ordem zero



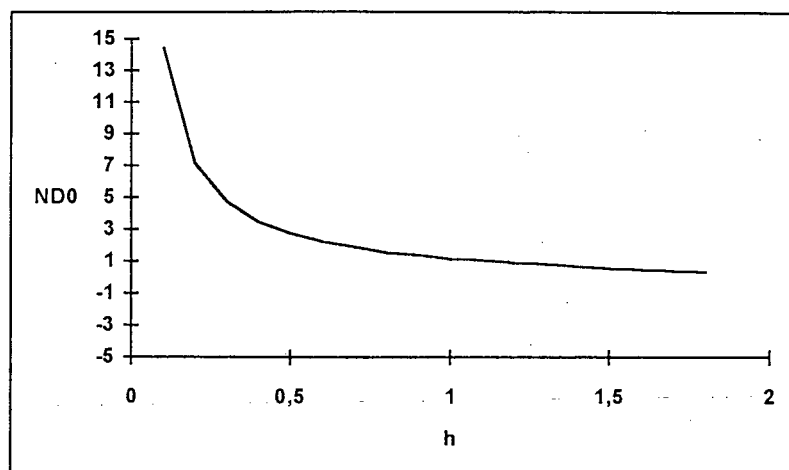
3.2 Função derivada radial de Mathieu de primeiro tipo e ordem zero



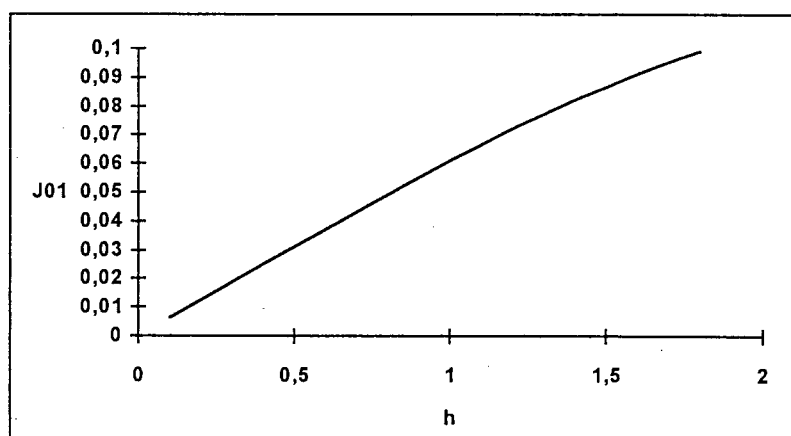
3.3 Função radial de Mathieu de segundo tipo e ordem zero



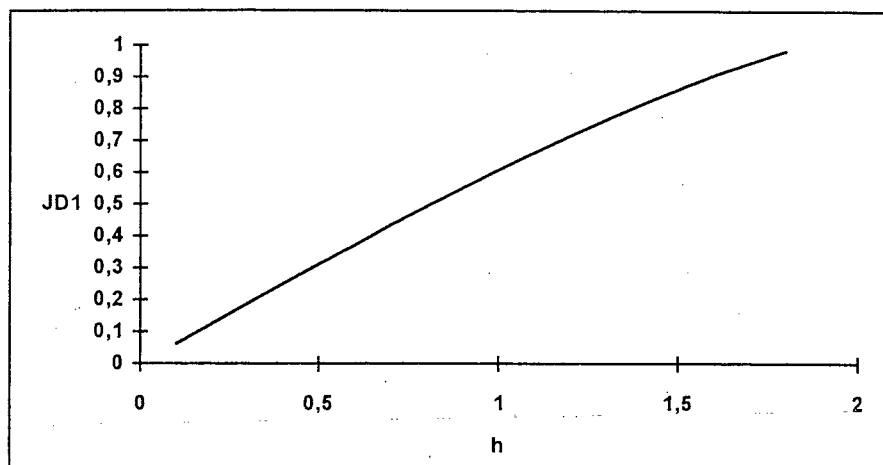
3.4 Função derivada radial de Mathieu de segundo tipo e ordem zero.



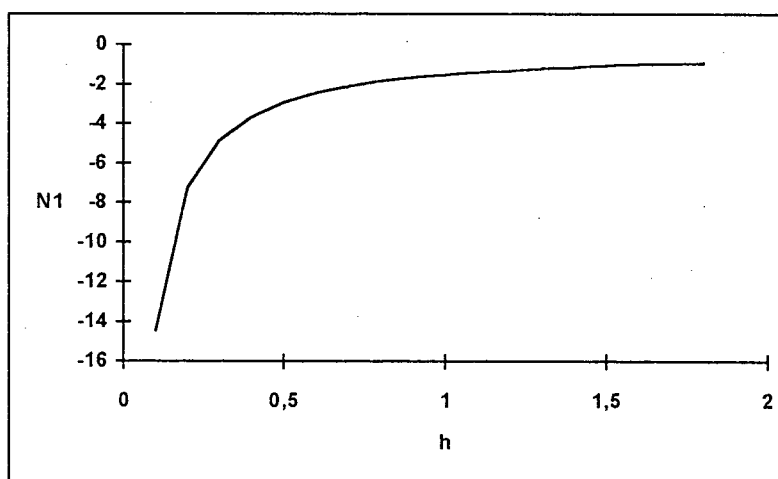
3.5 Função radial de Mathieu de primeiro tipo e primeira ordem



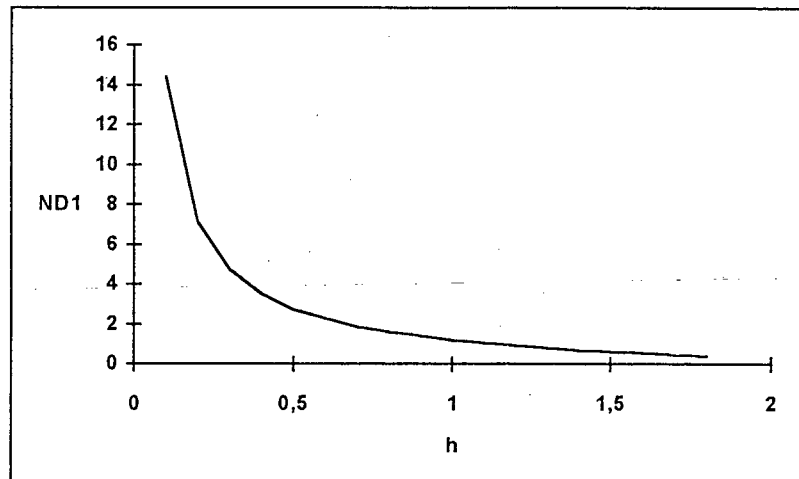
3.6 Função derivada radial de Mathieu de primeiro tipo e primeira ordem



3.7 Função radial de Mathieu de segundo tipo e primeira ordem



3.8 Função derivada radial de Mathieu de segundo tipo e primeira ordem



ANEXO IV

1 - GERAÇÃO DA MALHA ATRAVÉS DO PROGRAMA ANYS 5.0 - ELEMENTOS FINITOS

O método de Elementos finitos é uma técnica de análise numérica para obtenção de soluções aproximadas para uma gama de problemas em engenharia. Embora tenha sido desenvolvida originalmente para o estudo de tensões em estruturas aeronáuticas, ela foi estendida a outros problemas em mecânica, sendo utilizada mais intensamente em universidades e em indústrias, devido a sua flexibilidade e diversificação.

Em um problema do contínuo, de qualquer dimensão, a variável de campo pode assumir infinitos valores uma vez que ela é função de cada ponto genérico no corpo ou região de solução, portanto um problema com número infinito de incógnitas. O procedimento de discretização do método de Elementos Finitos, reduz o problema para um número finito de incógnitas pela divisão da região de solução em elementos e também, expressando a variável de campo desconhecida em termos de funções de aproximação ou funções de interpolação, para cada elemento. Estas funções são definidas em função dos valores da variável de campo em pontos específicos denominados nós.

O procedimento para a utilização do método de Elementos Finitos segue alguns passos que serão mostrados da maneira sucinta:

a) Discretizar o Continuo

b) Selecionar as funções de interpolação - Este passo deve ser feito observando os critérios de compatibilidade

c) Achar as propriedades dos elementos - Estudo das equações matriciais.

As equações matriciais mostram as propriedades individuais dos elementos, utilizando os métodos diretos, de balanço de energia, variacional ou de resíduos ponderados.

d) Obtenção do sistema de equações através da união das propriedades dos elementos.

e) Resolução do sistema de equações.

O método de Elementos Finitos possui aplicações variadas que são divididas em três classes ou categorias:

1) Problemas de Equilíbrio ou problemas independentes do tempo.

2) Problemas de Autovalores.

3) Problemas de propagação.

Problemas acústicos e interação flúido-estrutura podem ser abordados através do ANSYS 5.0 obtendo-se uma discretização que se baseia em dividir um sistema em vários elementos (método dos elementos finitos) conectados entre si pelos pontos nodais.

Os elementos, que podem ser formados por linhas, áreas, volumes, são a representação matemática matricial da interação entre os graus de liberdade dos conjuntos dos nós.

O nó é um ponto localizado no espaço onde estão definidos os graus de liberdade (deslocamento, velocidade, etc) e as ações (forças) do sistema.

Um conjunto de graus de liberdade que inclui um sistema contém translação e rotação do sistema, e as informações são passadas de um elemento para outro através dos nós comuns.

A análise de um sistema feito através dos graus de liberdade leva-se aos autovalores e autovetores que são associados com os modos de vibração do sistema.

A análise pode ser desenvolvida junto com os graus de liberdade de pressão ou de pressão e deslocamento. Neste estudo a determinação dos modos de vibração e respectivas frequências naturais foram obtidos através do grau de liberdade de pressão.

A escolha do modelo a ser utilizado será caracterizado pela sua forma geométrica que é obtido através da união dos nós. Os casos particulares de estudo, uni, bi ou tridimensional, são gerados de acordo com o grau de complexidade de cada superfície em estudo.

A análise dos problemas de acústica para os dois casos particulares seguiu o ambiente do programa ANSYS 5.0 que é dividido em três partes mostrados na figura 4.1.

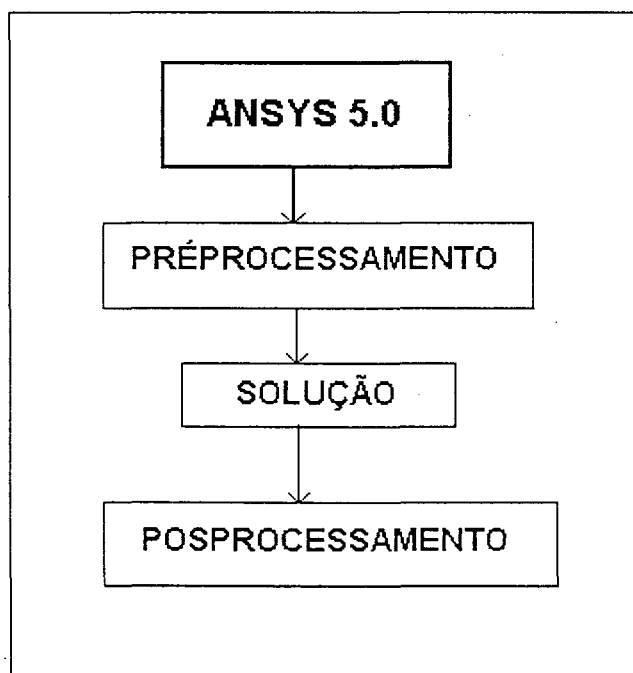


Figura 4.1: Fluxograma do ambiente do programa ANSYS 5.0.

1.1 PRÉ-PROCESSAMENTO

No pré-processamento, as propriedades dos materiais (densidade, módulo de Young, etc), e restrições a cada nó através dos graus de liberdade dará a oportunidade de se ter qualquer tipo de elemento que irá constituir o estudo, mostrado no quadro 4.1.

Parâmetro	valor
Raio	1.0 m
Espessura	0.001 m
Material	aço
Elemento de malha	incremento de 10^0
Modelo	elemento BEAM3
Densidade	7700 N/m^2
Coefic de Poisson (NUXY)	0.29
Modulo de Young (EX)	$21e^{10} \text{ N/m}^2$
Momento de Inércia	9.09×10^{-8}
Sistema de coordenada global (ponto inicial)	(0.0.0)
Número de nós	74
Grau de liberdade	1 (UY)
Condições de contorno	NSEL define para cada modo e usa simetria
CP	Define os nós acoplados

Quadro 4.1: Parâmetros contidos no pré-processamento.

1.2 SOLUÇÃO

A solução é a parte do programa onde se define:

- a) o tipo de análise que se fará no elemento desenvolvido no no préprocessamento.
- b) Normalização dos autovetores obtidos.
- c) Os deslocamentos e restrições de cada nó.

A solução é obtida segundo o quadro 4.2.

1 - ENTRA NO MODULO SOLUÇÃO
2 - DEFINE O TIPO DE ANÁLISE
Antype
Painel
3 - APLICA O CARREGAMENTO:
S - Estrutural
D - Restrições
F - Forças
BF - Carregamento
ACEL - Inércia
4 - SALVA OS DADOS
5 - SAI DO COMANDO

Quadro 4.2: Fluxograma da solução.

1.3 POSPROCESSAMENTO

No posprocessamento pode-se dispor dos modos de vibração do elemento criado através do quadro 4.3.

Resume	Resume os dados
Set	lê os resultados
Display	apresenta os resultados em gráfico
Prnsol	lista os resultados

Quadro 4.3: Fluxograma do posprocessamento

2 - UTILIZAÇÃO DA MALHA PELO SYSNOISE

O SYSNOISE é um sistema flexível e completo para problemas acústicos que combina técnicas computacionais.

Para a utilização do cálculo de elementos finitos baseado no SYSNOISE 5.0, é necessário criar a malha de elementos finitos que descreve a geometria do domínio de interesse.

O SYSNOISE 5.0 contém alguns tipos de opções a serem utilizados dependendo do método a ser usado.

O método de elementos finitos (F.E.M) é um método numérico usado para modelar o comportamento acústico no tratamento de problemas interiores cuja malha, discretizada externamente pelo ANSYS 5.0, é acoplada ao programa.

O método de elementos de contorno (B.E.M.) é também um método numérico que é usado na modelagem de problemas exteriores modelando o comportamento para radiação de fontes de vários modelos, assumindo que o comportamento dinâmico da estrutura não é modificado pela presença do fluido que a circunda e o comportamento vibracional pode ser especificado através das condições de contorno para o cálculo da radiação sonora da fonte.

O primeiro passo para uma análise numérica seja por elementos finitos ou elementos de contorno, se faz através de uma discretização da região de solução, ou seja, uma modelagem de uma estrutura ou fluido.

Para se fazer tal modelagem é necessário obedecer a um dos critérios impostos pelo programa SYSNOISE no qual a malha deve possuir no mínimo cinco ou seis elementos por comprimento de onda para elementos lineares. Deve-se observar, na geração das malhas, o sistema de coordenadas correto bem como a orientação correta dos elementos, evitando assim erros nos resultados e a escolha do tipo de aproximação numérica a ser utilizada.

O SYSNOISE usa dois tipos de aproximações numéricas:

Método dos elementos finitos (FEM);

Método dos elementos de contorno (BEM).

A formulação FEM necessita da discretização do meio em que a onda sonora se propaga, enquanto que no BEM somente um modelo da superfície vibrante deve ser discretizado.

Duas aproximações podem ser usadas para se resolver problemas em BEM.

Aproximações colocacional direta e aproximação variacional indireta.

O termo direto ou indireto se referem a escolha do parâmetro desconhecido na modelagem. O método direto usa a pressão e a velocidade normal como variável de superfície enquanto que o método indireto usa a descontinuidade da pressão através da superposição de superfícies finas.

As expressões variacional e colocacional referem-se a essa técnica de solução. Na técnica colocacional impõe-se que a solução aproximada satisfaça exatamente a certo número de pontos na superfície, chamados pontos colocacionais, e na técnica variacional a solução é obtida pela minimização de um funcional associado ao contorno original da equação integral.

SYSNOISE 5.0 é definido por um grupo de palavras chaves indicando cada escolha feita pelo operador apresentada no quadro 4.4.

MÉTODO	FEM ou BEM
FORMULAÇÃO	DIRETA ou INDIRETA
MÉTODO DE SOLUÇÃO	COLOCACIONAL ou VARIACIONAL
REGIÃO	INTERIOR ou EXTERIOR
HIPÓTESES	AMORTECIDO ou NÃO
VARIANTE	NÓ ou ELEMENTO

Quadro 4.4: Palavras chaves para o ambiente SYSNOIS 5.0.

2.1 MÉTODO NUMÉRICO.

A) FEM

O método numérico utilizando os elementos finitos para modelar o campo acústico pode ser utilizado desde que o campo (volume) inteiro seja discretizado. O método de elementos finitos é usado no tratamento de problemas interiores e é somente compatível com as opções dos quadro 4.5.

MÉTODO	FEM
FORMULAÇÃO	não pode ser usada
MÉTODO DE SOLUÇÃO	variacional
REGIÃO	interior
HIPÓTESES	amortecido ou não
VARIANTE	não pode ser usado

Quadro 4.5: Opções.

B) BEM

Define o método de elementos de contorno através de um método numérico para modelar o campo acústico. Com esta opção somente o contorno do domínio pode ser discretizado, e a formulação se encontra no quadro 4.6.

MÉTODO	BEM
FORMULAÇÃO	direta ou indireta
MÉTODO DE SOLUÇÃO	variacional
REGIÃO	interior ou exterior
HIPÓTESES	amortecido ou não
VARIANTE	nó ou elemento

Quadro 4.6: Formulação.

O método da solução variacional seleciona o esquema da solução variacional para um sistema simétrico de equações e é disponível tanto para o FEM quanto para o BEM indireto, enquanto que a solução colocacional seleciona para sistemas não simétricos de equações e é disponível somente para o método BEM direto.

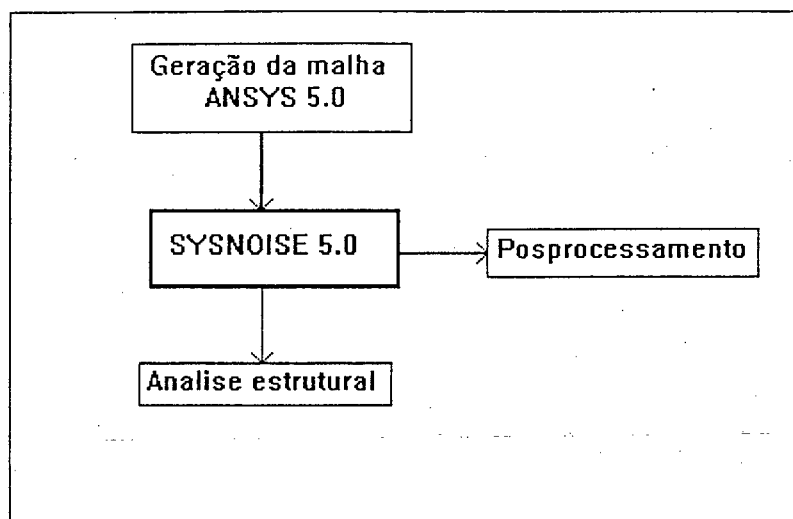
O método de elementos finitos (FEM) pode somente modelar problemas de acústica do meio interior e o método de elementos de contorno (BEM) indireto modela problemas de acústica do meio interior e exterior.

Na análise do caso desacoplado assume-se que a estrutura é rígida ou o seu comportamento dinâmico é conhecido e não é modificado pela presença do fluido. No caso do comportamento variacional pode se utilizar as velocidades da condição de contorno para calcular o ruído radiado. Este método é conhecido como o modelo de acústica puro ou acoplamento em uma direção.

Duas variantes do método de elementos de contorno direto são implementadas ; a variante principal que corresponde a implementação do nó que indica que todas as condições de contorno são definidas pelos nós e que os valores nodais são os parâmetros fundamentais do problema.

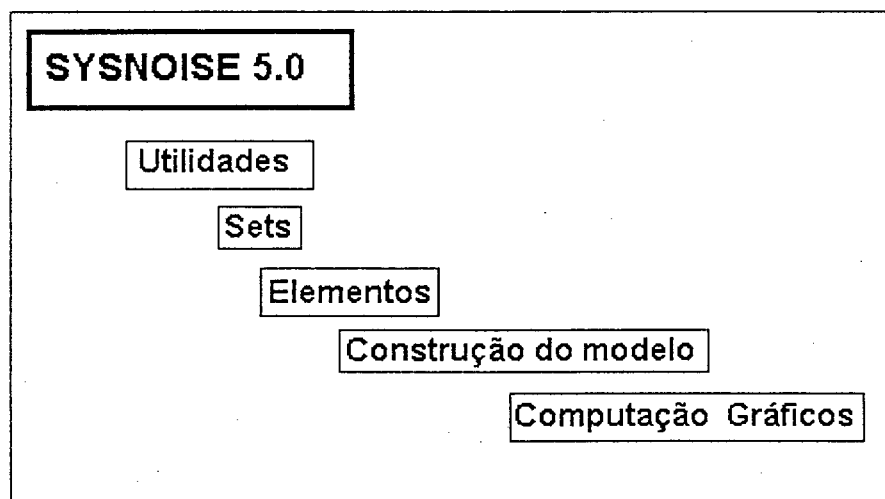
O SYSNOISE interagem de maneira satisfatória com os programas geradores de malha, e neste trabalho foi utilizado o programa ANSYS 5.0 para essa finalidade, assim a comunicação dos dados foi realizada de acordo com o quadro 4.7.

n os



Quadro 4.7: Interação entre ANSYS 5.0 e SYSNOISE 5.0.

O ambiente do programa SYSNOISE 5.0 é composto de partes e comandos segundo o quadro 4.8.



Quadro 4.8: Comandos do SYSNOISE 5.0.

Cada comando é a representação de uma série de dados que têm que compor o método de execução através dos quadros 4.9, 4.10, 4.11, 4.12.

UTILIDADES
CHECAR A MALHA
DEPURAR A MALHA
TESTAR A MALHA

Quadro 4.9: Dados iniciais.

SETS
SELECIONAR O GRUPO DE NÓS
OPERAR ENTRE OS GRUPOS
CRIAR ELEMENTOS DE JUNÇÃO

Quadro 4.10: Controle dos elementos de entrada.

CONSTRUÇÃO DO MODELO (ELEMENTOS)	
DIMENSÕES	uma dimensão duas dimensões tres dimensões
SIMETRIA	simetria aximetria sem aximetria
CONDIÇÕES DE CONTORNO	contorno fonte junção automática meio espaço
MODIFICAÇÃO DA MALHA	duplicar os nós
SOBREDETERMINAÇÃO	

Quadro 4.11: Construção do modelo.

COMPUTAÇÃO
COMPUTAR OS DADOS
OBTER A DIRETIVIDADE
OBTER OS MODOS
GERAR OS GRÁFICOS

Quadro 4.12: Obtenção dos resultados.

ANEXO V

5.1 -MÉTODO DA FÍSICA TEÓRICA

Um problema externo simples é à radiação de uma superfície cuja forma seja uma tira de espessura zero e largura a . Se a tira é longa bastante, e o movimento é uniforme ao longo de seu eixo, o problema torna-se bi-dimensional e pode-se usar os eixos elípticos.

5.1.1 RADIAÇÃO ACÚSTICA DE UMA TIRA VIBRANTE

Nesse caso, assume-se que o movimento é normal à superfície da tira, com velocidade $v_0 e^{-i\omega t}$ na parte que vai desde $\vartheta = 0$ até $\vartheta = 2\pi$ e $-v_0 e^{-i\omega t}$ para a parte que vai de $\vartheta = \pi$ até $\vartheta = 2\pi$. Portanto, se ψ é o potencial de velocidade, as condições de contorno em $\mu = 0$ é que:

$$-\text{grad}\psi = +v_0 \quad (0 \leq \vartheta \leq \pi)$$

$$-\text{grad}\psi = -v_0 \quad (\pi \leq \vartheta \leq 2\pi)$$

$$\text{Ou desde que } \text{grad}\psi = \left| \frac{2}{a \sin \vartheta} \right| \frac{\partial \psi}{\partial \mu}$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right)_{\mu=0} = -\frac{1}{2} a v_0 \sin \vartheta \text{ significando que } \psi \text{ é uma função impar (odd) e deve-se}$$

usar as funções S_0 , J_0 e N_0 .

Usando uma das condições de contorno no infinito que só há ondas "outward", portanto se deve usar a função de Hankel.

$$\text{A função derivada é } \frac{d}{d\mu} = H_0(h, \cosh \mu) = iC_m^0 e^{i\sigma_m(h,m)} = \frac{d}{d\mu} [J0_m + iN0_m]$$

Há uma solução similar para quando a função for impar (odd), deve-se notar que os argumentos são $\frac{1}{2}h$

Usando a aproximação realizado por Feshbach [17], obtém-se:

$$C_1^0 \cong \frac{2}{h} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1 - \frac{3}{32} h^2); \sigma_1^0 \cong -\frac{\pi}{8} h^2 (1 + \frac{1}{16} h^2) \quad (5.1.1)$$

Consequentemente a equação para a onda radiada será:

$$\psi = \frac{1}{2} i\pi a v_0 \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{B_1^0(h, 2m)}{M_{2m+1}^0} \right] \left[\frac{H_{2m+1}^0(h, \cosh \mu)}{H_1^0(h, \cosh \mu)} \right] S0_{2m+1}(h, \cos \vartheta) \quad (5.1.2)$$

Usando a relação [35]; $P = i\omega \rho \psi$ e substituindo em (5.1.2) obtém-se:

$$P = -\frac{1}{2} \pi a \omega \rho v_0 \sum \left[\frac{B_1^0((h, 2m+1))}{M_{2m+1}^0} \right] \left[\frac{H_{2m+1}^0(h, \cosh \mu)}{H_1^0(h, \cosh \mu)} \right] S0_{2m+1}(h, \cos \vartheta) \quad (5.1.3)$$

Para $m=0$, em (5.1.3) obtém-se a pressão acústica para o modo vibrante.

$$P = -\frac{1}{2} \pi a \omega \rho v_0 \left[\frac{B_1^0(h, 1)}{M_1^0(h)} \right] \left[\frac{H_1^0(h, \cosh \mu)}{H_1^0(h, \cosh \mu)} \right] S0_1(h, \cos \vartheta) \quad (5.1.4)$$

Podendo utilizar as fórmulas de recorrências de Feshbach [17], pode-se escrever as seguintes aproximações contidas em (5.1.4):

$$B_1^0(h, l) = 1 + \frac{1}{4}h^2 - \frac{1}{128}h^4 + \dots$$

$$S_1^0(h, \cos\varphi) = \left(1 + \frac{3h^2}{32} + \frac{13h^4}{3072}\right) \sin\varphi - \left(\frac{h^2}{32} + \frac{h^4}{512}\right) \sin 3\varphi$$

$$M_1^0(h) = \pi \left(1 + \frac{3}{16}h^2 + \frac{7}{384}h^4\right) \quad (5.1.5)$$

$$C_1^0 \approx \frac{2}{h} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(1 - \frac{3}{32}h^2\right)$$

$$\delta_1^0 \approx \frac{\pi}{8}h^2 \left(1 + \frac{1}{16}h^2\right)$$

Apesar das aproximações sugeridas, o autor não apresentou nenhum valor para a tira vibrante.

5.2 - RADIAÇÃO DE UMA BARRA LIVRE-LIVRE NO AR E NA ÁGUA

5.2.1. GEOMETRIA DA BARRA

Parâmetro	valor
Comprimento	L
Largura	w
Espessura	h_p

O objetivo é determinar a pressão acústica em um campo distante.

Para resolver a equação para uma solução particular é necessário resolver uma equação integral não homogênea.

A forma mais direta é resolver um problema de radiação aproximando a barra com um segmento vibrante de comprimento L de um cilindro elíptico infinito cuja secção transversal é representada pôr uma elipse de eixo maior $w/2$ e eixo menor $\frac{h_p}{2}$ representado pela figura 2.1 abaixo.

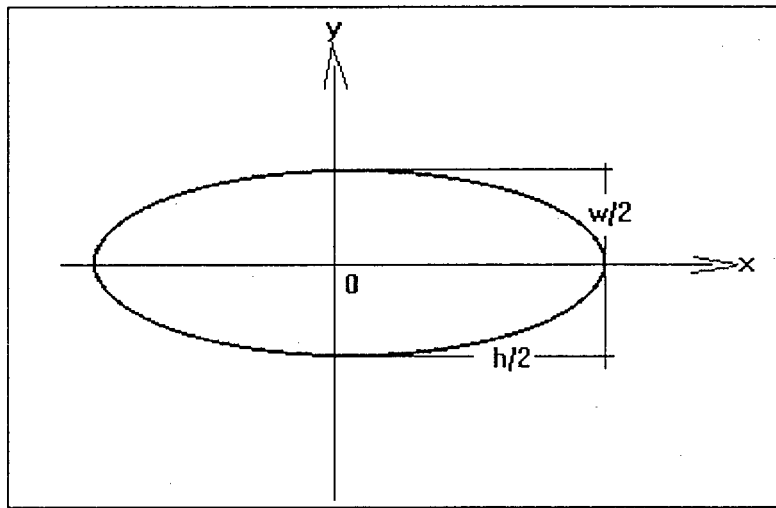


Figura 2.1: Coordenadas elípticas para a barra.

Em coordenadas elípticas se obtém:

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial \nu^2} \right) \frac{1}{2 \left(\frac{w}{2} \right)^2 (\cosh 2\mu - \operatorname{sen} \nu)} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (5.2.1)$$

A transformada axial da pressão pode ser definida como:

$$p(\mu, \nu, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}(\mu, \nu, \gamma) e^{-i\gamma z} d\gamma, \text{ que substituindo na equação (5.2.1)}$$

obtém-se:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} + \left(\frac{w}{2}\right)^2 [v^2 - k_0^2] [\cosh^2 \mu - \cos^2 \vartheta] \bar{p} = 0 \quad (5.2.2)$$

As condições de contorno na superfície da barra ($\mu = \mu_0$) usado na equação são:

$$\nabla_n p = \rho_0 \frac{\partial U}{\partial t} \quad \nabla_n \rightarrow O \text{ gradiente normal da pressão}$$

$$U = U(x, t) \rightarrow \text{componente normal da velocidade}$$

$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \mu}_{\mu=\mu_0} = i\omega \frac{w}{2} |\sin v| \bar{U}(\mu_0, v, \gamma)$ onde a velocidade transformada da barra é;

$$\bar{U}(\mu_0, v, \gamma) = \int_{-L/2}^{L/2} U(\mu_0, v, z) e^{-i\gamma z} dz. \quad (5.2.3)$$

A velocidade do fluido no plano ($\mu = \mu_0$) na barra amortecida é:

$$U(\mu_0, v, z) = \sum_m U_m(v, \omega) \psi_m(z), \text{ para a região } |z| < L/2 \leftrightarrow (0 \text{ para } |z| > 2)$$

A equação para a solução geral:

$$p(\mu, v, \gamma) = \sum_m A_m H_m(h, \cosh \mu) S_m(h, \cos v) \quad (5.2.4)$$

O valor do coeficiente pode ser obtido sob a forma:

$$A_m^e = \frac{i\omega p 4w}{2} \bar{U}(\mu_0, v) \frac{B_e(h, 2m)}{Me_{2n}} * \left[\frac{\partial H}{\partial \mu} \right]^{-1} \quad (5.2.5)$$

$$Se_{2m}(h, \cos v) = \sum_{n=0} Be_{2n}(h, 2m) \cos(2n)v$$

5.2.2 APROXIMAÇÕES

1 - Radiação em Campo livre, em baixa frequência, para barras não amortecidas.

2 - Avaliando para campo distante ($\mu \rightarrow \infty$) e utilizando as aproximações de Barakat, que fornece expansões assintóticas para Mathieu e seus coeficientes, válidos para $h \ll 2$, obtém-se dessa forma as aproximações necessárias tais como:

$$S_{0,2m+1}(h, \cos v) \approx B_{0,1} \sin v$$

$$H_{0,2m+1}(h, \cosh \mu) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tanh \mu B_{0,1} H_{0,2m+1}^2(h, \cosh \mu)$$

$$B_{0,1} \approx 1 + \frac{3h^2}{32} \quad \text{e} \quad M_{0,1} \approx \pi \left(1 + \frac{3h^2}{16}\right)$$

(5.2.6)

$H_m^2(h, \mu)$ é a função de Hankel e, somente quando $m=0$ o termo irá se manter na equação geral, através dos termos de alta ordem que envolve os harmônicos de alta ordem da superfície, não influenciando o resultado no campo distante. Os coeficientes acima são truncados tem os valores tabulados.

Fazendo $k_0 h_p \rightarrow 0$, a barra pode ser considerada como uma fita ou tira de espessura zero o que pode ser aproximada como, $\mu_0 = 0$, que pode fornecer:

$$\left. \frac{\partial H_1^0}{\partial \mu} \right|_{\mu_0=0} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{3h^2}{32}\right) H_1^2(h) \quad (5.2.7)$$

Se a contribuição dominante para a radiação vem do número de ondas, $v \leq k_0$ e se, $\frac{k_0 w}{2} \ll 1$, pode-se fazer a seguinte aproximação :

$\text{Lim} H_1^2(h) = \frac{2i}{\pi h}$, podendo obter a equação:

$$p(\mu, \nu, z) \approx \frac{\sqrt{-1} \rho_0 c_0 k_0 w^2 \sin \nu}{32 \sqrt{r}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-i(k_0^2 - \gamma^2)^{\frac{1}{2}} r - i\gamma z\right) (k_0^2 - \gamma^2)^{\frac{1}{4}} \bar{U}(\mu_0, \gamma) d\gamma \quad (5.2.8)$$

Essa integral, é similar a solução para cilindro circular.

5.3 - EFICIÊNCIA DE RADIAÇÃO DE BARRAS EM VIBRAÇÃO DE FLEXÃO

As soluções das equações de Mathieu apresentada por Jeyapalan [16] podem ser escritas sob a forma:

$$\frac{d^2 f(u)}{du^2} - \{c - 2q \cosh(2\mu)\} f(u) = 0$$

$$\frac{d^2 g(\theta)}{d\theta^2} - \{c - 2q \cos(2\theta)\} g(\theta) = 0 \quad (5.3.1)$$

$$\text{onde } q = \left(\frac{k_d h}{2}\right)^2$$

A partir da segunda equação em (5.3.1) obtém-se uma solução periódica escrita sob a forma:

$$g(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_{2n+1} \text{Ce}_{2n+1}(\theta, q) + B_{2n+1} \text{Se}_{2n+1}(\theta, q)]$$

A solução para a primeira equação em (5.3.1) é:

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} [D_{2n+1} \text{Ne}_{2n+1}^1(u, q) + E_{2n+1}^1 \text{Me}_{2n+1}^1(u, q)] \quad (5.3.2)$$

Usando as condições de contorno na superfície de radiação, isto é, $(\text{grad } p)_n = i\omega\rho_0 v_n$ de uma barra elíptica vibrando perpendicular ao eixo maior.

$$v_n = \frac{a \sin \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b \sin^2 \theta}} \quad \text{e se utilizando as condições de contorno se}$$

obtem:

$$\frac{\partial p(u, \theta)}{\partial u} \Big|_{u=u_0} = i\omega\rho_0 a v_0 \sin \theta \quad \text{o lado direito sendo uma função impar.}$$

Juntando a solução para a primeira equação (5.3.2) e para a segunda (5.3.1) se obtém uma solução geral do tipo:

$$(u, \theta, z, t) = \sum \left[F_{2n+1} \text{Se}_{2n+1}(\theta, q) \text{Ne}_{2n+1}^1(u, q) + G_{2n+1} \text{Ce}_{2n+1}^1(\theta, q) \text{Me}_{2n+1}^1(u, q) \right] \cos(k_b z) e^{-i\omega t} \quad (5.3.3)$$

O segundo membro da equação é uma função par logo desaparecerá de acordo com o estabelecido anteriormente. Usando a equação que relaciona a derivada da pressão com a velocidade de superfície, se obtém:

$$\sum_{n=0}^{2n+1} F_{2n+1} \text{Se}_{2n+1}(\theta, q) \overline{\text{Ne}}_{2n+1}^1(u_0, q) = i\omega\rho_0 a v_0 \sin \theta \quad (5.3.4)$$

A solução para a pressão sonoras segundo Jeyapalan é:

$$P(u, \theta, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i\omega\rho_0 a v_0 \sin \theta}{\overline{\text{Ne}}_{2n+1}^1(u_0, q)} \text{Se}_{2n+1}(\theta, q) \text{Ne}_{2n+1}^1(u, q) \cos(k_b z) e^{-i\omega t} \quad (5.3.5)$$

A equação do potencial de radiação é :

$$w = \int P \cdot v_n$$

$$\langle W \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{2\pi} \int_0^L [P(u, \theta, z, t)_{\text{real}} * v_{\text{real}}] a. du. d\theta. dz. dt \quad (5.3.6)$$

$$w = \frac{1}{4} i \omega \rho_0 v_0 a \left[\sum_{n=0}^{\infty} B_1^{(2n+1)^2} \frac{Ne_{2n+1}^1(u_0, q)}{\overline{Ne}_{2n+1}^1(u_0, q)} \right] \quad (5.3.7)$$

A equação é válida para valores reais de k_d , isto é, $k_0 > k_b$.

Para $k_0 < k_b$ a energia radiada no campo distante é zero.

Quando $k_0 = k_b$ existe a frequência de coincidência actuando.

5.3.1 FATOR DE PERDA DE RADIAÇÃO

O cálculo do fator de perda de radiação foi aplicado pelo autor seguindo as seguintes definições :

$$\text{Resistência de radiação } R_{\text{rad}} = \frac{\langle w \rangle}{\langle v^2 \rangle}$$

$$\text{Eficiência de radiação} = \frac{\langle w \rangle}{\rho c s \langle v^2 \rangle}$$

$$\text{O factor de perda na radiação } \eta_{\text{rad}} = \frac{R_{\text{rad}}}{\omega M}, \text{ onde } M = \rho_m l \pi (a^2 - a_i^2)$$

$$\eta_{\text{rad}} = i \left(\frac{\rho}{\rho_m} \right) \left(\frac{\pi a^2}{A} \right) \left[\frac{Ne}{\overline{Ne}} \right]_{\text{imag}} \quad \text{onde } A \text{ é o comprimento periférico externo.}$$

Jeyapalam, plota as duas equações abaixo, fazendo comparação de erro entre elas.

$$\eta_{\text{rad}} = \frac{\rho_m}{\rho} \left(\frac{\pi a^2}{A} \right)_{\text{real}} \left[i \sum (B_i^{2n+1}) \frac{Ne}{\overline{Ne}} \right]_{\text{real}} \quad (5.3.8)$$

$$\eta_{\text{rad}} \frac{\rho_m}{\rho} \left[1 - \frac{a_i b_i}{ab} \right] \left[\frac{b}{a} \right] x [K_d U] \quad (5.3.9)$$

O fator de perda de radiação de uma barra elíptica varia com a razão aspecto.

A eficiência de radiação também varia com a área projetada, então, tomando $K_d U$ como uma das variáveis no eixo das abscissas e dividindo os valores da ordenada pela razão aspecto, obtém-se os valores para as duas funções.

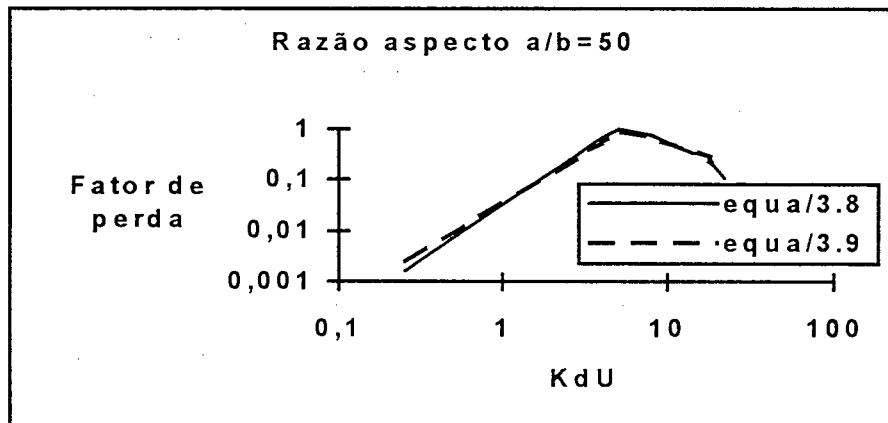


Figura 5.3.1: Comparação entre o método exato para a avaliação do fator de perda de uma barra com razão aspecto $a/b = 50$.

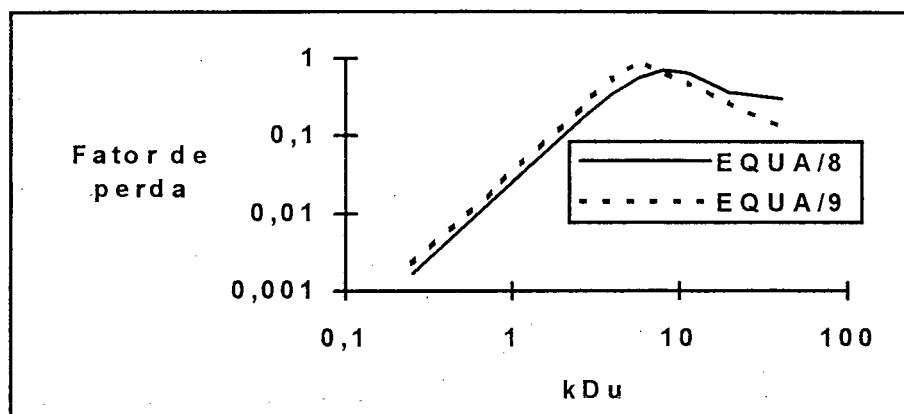


Figura 5.3.2: Comparação entre o método exato para a avaliação do fator de perda de uma barra com raio aspecto $a/b = 0.05$.

5.4 RESISTÊNCIA DE RADIAÇÃO DE UM PAINEL RETÂNGULAR.

A resistência de radiação correspondendo aos modos naturais de uma painel retângular é determinada através da energia radiada. O painel é simplesmente apoiado em um baffle infinito.

A análise é realizada assumindo que a velocidade da superfície vibrante está sob a forma:

$$U_{\omega} = U_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (5.4.1)$$

onde:

$$0 \leq x \leq a$$

$$0 \leq y \leq b$$

O ponto fundamental das expressões de Wallace [28] é implementado quando o número de onda é normalizado com o número de onda da placa, onde:

$$k_p^2 = \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \quad (5.4.2)$$

8] é

Os valores obtidos para a eficiência de radiação foram obtidos para os modos de vibrações ímpares e pares e a expressão utilizada de forma aproximada foi:

$$S_{mn} \approx \frac{32}{mn\pi^3} \left(\frac{an}{mb} + \frac{mb}{an} \right) \gamma^2 \left\{ 1 - \left[\left(1 - \frac{8}{(m\pi)^2} \right) \frac{a}{b} \right] \left(\frac{an}{mb} + \frac{mb}{an} \right) \frac{mn\pi}{12} \gamma^2 \right\}$$

(5.4.3)

onde:

$$\gamma = \frac{k}{k_p}$$

m e n são os modos de vibração em cada direção

a e b são as dimensões do painel

S_{mn} é a eficiência de radiação do painel.

5.5 VISUALIZAÇÃO DA FORMA DE AUTOMODOS ESPECIAIS DE VIBRAÇÃO EM UMA MEMBRANA ELÍPTICA.

A análise das autofunções e autovalores de Laplacian é importante para entender os sistemas de vibrações com parâmetros distribuídos e mecânica quântica obtidos por Chen [30]. A modelagem da membrana elíptica em modos de vibrações é obtido a partir dos conceitos do Lord Rayleigh sobre onda sonoras em altas frequências.

A apresentação de alguns fenômenos pertencentes a mecânica quântica é realizado a partir da condição de contorno de Dirichlet.

$$\phi_n(x)|_{\partial\Omega} = 0 \quad (5.5.1)$$

Assim no plano (x_1, x_2) da membrana se estabelece o sistema de coordenadas elípticas sob a forma:

$$x_1 = \frac{c}{2} \cosh \mu \cos \theta \quad (5.5.2)$$

$$x_2 = \frac{c}{2} \sinh \mu \sin \theta$$

onde c é uma constante positiva.

$$0 \leq \mu < \infty \quad \text{e} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Usando as coordenadas elípticas e realizando a separação de variáveis para a equação de Helmholtz, obtém-se as equações de Mathieu.

Os autovalores são determinados a partir de um estudo sobre as equações de Mathieu periódica e radial de forma truncada e obtendo as funções de Mathieu como soluções:

$$\omega(x_1, x_2) = ce_m(\theta, q) Ce_m(\mu, q) \quad (5.5.3)$$

Assume-se que o contorno do dominio elíptico sobre o qual as condições de Dirichlet possa ser aplicada, obtendo-se portanto :

$$\omega = \gamma_m Se_m(h, \theta) Je_m(h, \mu) \quad (5.5.4)$$

onde:

γ é constante a ser determinada através das manipulações das funções de Mathieu.

$Se_m(h, \theta)$ é a função periódica de Mathieu de ordem m .

$Je_m(h, \mu)$ é a função radial de Mathieu de ordem m .

ω são os modos de vibração para cada caso associado.

O objetivo do trabalho é obter resultados que fossem comparados com R. Hettich [31] e que gerassem as regiões tridimensionais proibitivas clássicas da mecânica quântica obtendo os valores através de números fixo denominados de raízes da solução.

Apos algumas manipulações sobre (5.5.4) é possível obter valores numéricos para as duas funções de Mathieu fazendo variar os argumentos das funções e comparando com K-R através da tabela obtida para $\frac{kc}{2}$ e fixando o ângulo da elipse.

ANEXO VI

6.1 CÁLCULO DO NÚMERO CARACTERÍSTICO E COEFICIENTES NORMALIZADOS

A obtenção da função periódica de Mathieu como solução para a equação (2.3.1) será realizada para a primeira solução substituindo cada série em (2.3.1) e igualando a zero os coeficientes gerados por $\cos 2\theta$, $\cos(2r+1)\theta$, $\sin 2\theta$ e $\sin(2r+1)\theta$ quando $r=0,1,2,\dots$

A solução das frações contínuas para o conjunto dos cosseno elípticos de primeiro tipo de período 2π é apresentada abaixo.

$$\begin{aligned}
 1) \quad d.D_0 - h.D_2 &= 0 & \text{para } Ce_{2n}(\theta, k) \\
 2) \quad (D - 4)D_2 - h(D_4 + 2D_0) &= 0 \\
 3) \quad (d - 4r^2)D_{2r} - h(D_{2r+2} + D_{2r-2}) &= 0 & r \geq 2
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Onde, $D_{2p}^{2n}(h)$ é o coeficiente normalizado da série das funções de Mathieu de ordem p .

$$\text{Usando as relações } v_0 = \frac{D_2}{D_0}, \quad v_2 = \frac{D_4}{D_2} \quad \text{e} \quad v_0 \cdot v_2 = \frac{D_4}{D_0}$$

A relação (1) acima fornecerá uma expressão para v_0 sob a seguinte forma:

$$v_0 - \frac{d}{4}v_0 + \frac{h}{4}v_2v_0 = -\frac{h}{2} \quad (6.2)$$

A expressão (6.2) poderá ser reagrupada na forma:

$$v_0 = \frac{\frac{h}{2}}{\left[1 - \frac{1}{4}(d - hv_2)\right]} \quad (6.3)$$

Usando a relação (3) de (A.6.1) na forma:

$$\left(a - 4r^2\right) \frac{D_{2r}}{D_{2r-2}} - h \left[\frac{D_{2r+2}}{D_{2r-2}} + 1 \right] = 0 \text{ e substituindo as expressões;}$$

$$v_{2r} = \frac{D_{2r+2}}{D_{2r}} \text{ e } v_{2r-2} \cdot v_{2r} = \frac{D_{2+2r}}{D_{2r-2}} \text{ se obtém uma relação mais ampla}$$

na forma:

$$-v_{2r-2} = \frac{\frac{h}{4r^2}}{\left[1 - \frac{1}{4r^2}(d + hv_{2r})\right]} \quad (6.4)$$

A expressão (6.4) poderá ser desenvolvida a medida que r for tomando valores inteiro ($r=1,2,3,4,\dots$) e assim escrever as frações contínuas para o termo v_0 .

$$-v_0 = \left[\begin{array}{c} \frac{h}{2} \\ 1 - \frac{1}{4}d + h \left\{ \frac{\frac{h}{36}}{1 - \frac{1}{16} \left(d - h \frac{\frac{h}{36}}{1 - \frac{1}{36}(a - hv_6)} \right)} \right\} \end{array} \right]$$

(6.5)

A expressão (6.5) acima, torna-se uma expressão sob a forma de frações contínuas que através da normalização dos termos pode-se ter os valores mais exatos para os coeficientes das funções de Mathieu.

A normalização é feita sob a forma:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Ce_m^2(k, \theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} Se_m^2(k, \theta) d\theta = 1$$

$$2[A_0^{2n}(k)]^2 = \sum_{r=0}^{\infty} [A_{2r}^{2n}(k)]^2 = 1 \quad (6.6)$$

As expressões contidas em (6.6) são as formas que se obtém os coeficientes normalizados para a função de Mathieu para que eles sejam convergente.

Embora o estudo tenha sido desenvolvido para um caso particular, a generalização para os quatros (4) casos é válida e confirmada por vários autores.

A avaliação de d (número característico) para a função em estudo $Ce_{2n}(k, \theta)$ para $n > 0$ leva a ser usar a relação:

$$-v_{2r-2} = \frac{\frac{h}{4r^2}}{\left[1 - \left(\frac{1}{4r^2}\right)(d - hv_{2r})\right]} \quad (6.7)$$

Usando $r+1$ em r e multiplicando (2.2.14) por $\frac{h}{4r^2}$ obtém a expressão:

$$-\frac{hv_{2r}}{4r^2} = \frac{\frac{h^2}{16r^2(r+1)^2}}{1 - \frac{1}{4(r+1)^2}(d - hv_{2r+2})} = E_{2r} \quad (6.8)$$

Da mesma forma, ao substituir em (6.8) por $(r-1)$, obtém-se:

$$\frac{hv_{2r}}{4r^2} = 1 - \frac{a}{4r^2} - \frac{\frac{h^2}{16r^2(r-1)^2}}{1 - \frac{a}{4(r-1)^2} + \frac{\frac{h^2}{16(r-1)^2(r-2)^2}}{\frac{hv_{2r-2}}{4(r-2)^2}}} = F_{2r} \quad (6.9)$$

Para que haja convergência é necessário que as expressões (6.8) e (6.9) devem escritas sob a forma:

$$G_{2r} = 1 - \frac{a}{4r^2} - E_{2r} - F_{2r} \quad (6.10)$$

Esta expressão fornecerá a possibilidade para se testar a convergência da função em estudo, assim como os valores dos coeficientes da série de Fourier que comporá a solução em forma de somatório de cossenos elípticos ou senos elípticos, conforme a periodicidade da função. Da mesma maneira

que foi desenvolvido a expressão (6.9) quando se utilizou a expressão (1) para o cosseno elíptico com periodicidade 2π as outras 3(três) funções em (6.1) podem ser obtidas.

ANEXO VII

1 - Relação de para os coeficientes e frações contínuas.

As relações de recorrência foram obtidas por Feshbach [17] para as quatro soluções da função periódica de Mathieu. Cada solução é desenvolvida em uma série de funções senoidais ou cossenoidais mantendo a relação dos coeficientes, como é apresentado para cada caso.

I) Para o cosseno elíptico par, $Ce_{2n}(h, \theta)$

$$A) dD_0 - hD_2 = 0$$

$$1) (d - 4)D_2 - h(D_4 + 2D_0) = 0$$

$$2) (a - 4r^2)D_{2r} - h(D_{4r} + 2D_0) = 0$$

II) Para o cosseno elíptico ímpar, $Ce_{2n+1}(h, \mu)$

$$(a - 1 - h)D_1 - hD_3 = 0$$

$$[d - (2r + 1)^2]D_{2r+1} - h(D_{2r+3} + D_{2r-1}) = 0$$

III) Para seno elíptico ímpar, $Se_{2n+1}(h, \mu)$

$$(d-1-h)D_1-hD_3=0$$

$$[d-(2r+1)^2]D_{2r+1}-h(D_{2r+3}+D_{2r-1})=0$$

IV) Para seno elíptico par, Se $_{2n+2}$

$$(d-4)D_2-hD_4=0$$

$$(d-4r)^2D_{2r}-h(D_{2r+2}+SD_{2r-2})=0$$

$$\text{Escrevendo } v_0 = \frac{D_0}{D_2} \quad v_2 = \frac{D_4}{D_2} \quad v_0 v_2 = \frac{D_2}{D_0} \frac{D_4}{D_2} \quad (7.1)$$

Substituindo as expressões contidas na segunda relação em
(I) apresentada para o cosseno elíptico par, tem-se:

$$(d-4)D_2-h(D_4+2D_0)=0$$

$$(4-d)\frac{D_2}{D_0}+h\left(\frac{D_4}{D_0}+2\right)=0$$

$$(4-d)V_0+h(v_0v_2+2)=0$$

$$v_0 - \frac{d}{4}v_0 + \frac{h}{4}v_2v_0 = -\frac{h}{2}$$

$$v_0 = \frac{\frac{h}{2}}{\left[1 - \frac{1}{4}(d - hv_2)\right]} \quad (7.2)$$

A relação (7.2) é analoga a relação encontrada por Feshbach [17].

Usando a relação 2 de (7.1) pode-se escrever:

$$(d - 4r^2)D_{2r} - h(D_{2r+2} + D_{2r-2}) = 0 \quad (7.3)$$

Aplicando em (7.3) as relações abaixo;

$$v_{2r-2} = \frac{D_{2r}}{D_{2r-2}} \quad v_{2r} = \frac{D_{2r+2}}{D_{2r}} \quad v_{2r-2}v_{2r} = \frac{D_{2r}}{D_{2r-2}} \frac{D_{2r+2}}{D_{2r}} \quad (7.4)$$

Desenvolvendo de forma análogo ao exemplo anterior, obtem-se uma expressão mais geral denominada de frações contínuas:

$$-v_{2r-2} = \frac{\frac{h}{4r^2}}{\left[1 - \frac{1}{4r^2}(d + hv_{2r})\right]} \quad (7.5)$$

Usando a relação geral (7.5) e fazendo $r=3$, tem-se:

$$-v_0 = \frac{\frac{h}{2}}{\left[1 - \frac{1}{4}d + h \left\{ \frac{\frac{h}{36}}{\left[1 - \frac{1}{16} \left(d - h \left[\frac{\frac{h}{36}}{\left[1 - \frac{1}{36}(d - hv_6)\right]} \right] \right)} \right\} \right]} \quad (7.6)$$

A expressão (7.6) é denominada de frações contínuas para tres argumentos.

Retornando a expressão A da relação de recorrência (I), pode-se escrever:

$$dD_0 - hD_2 = 0 \quad (7.7)$$

$$d - h \frac{D_2}{D_0} = 0$$

$$V_0 = \frac{d}{h} \quad (7.8)$$

A expressão (7.8) fornece a relação entre a frações contínuas e o número característico d ; e dessa expressão pode-se ter:

$$d = v_0 h \quad (7.9)$$

Substituindo (7.9) em (7.6);

$$-d = \frac{h^2}{2} \left[1 - \frac{1}{4} d + h^2 \left\{ \frac{h^2}{36} \left[1 - \frac{1}{16} \left(d - h^2 \left[1 - \frac{1}{36} (d - h^2 v_6) \right] \right) \right] \right\} \right] \quad (7.10)$$

Desprezando todos os termos, exceto o primeiro da expressão (10) e fazendo $h=8$ tem-se o valor para a primeira aproximação do número característico:

$$d_0 = \frac{32}{1 - \frac{1}{4}d_0} \quad (7.11)$$

Em (7.11) os valores do número característico, d_0 , são:

$$d_0 \approx -9.5 \text{ ou } d_0 \approx +13.5$$

Retornando a expressão (7.10), e substituindo o valor $d_0 = +13.5$ encontrado na expressão (7.11), nos tres primeiros termos, obtem-se:

$$a_0 = -0.776$$

A discrepância entre os valores para o número característico, -0.776 e -13.5 demonstra que houve uma escolha errada para o valor da raiz, inicialmente.

Um nova tentativa será utilizada fazendo; $a_0 = -10$. O novo valor para raiz (número característico) é $a_0 = 11.2$.

A expressão geral (7.6) será utilizada sem o segundo termo do denominador ficando sob a forma:

$$v_{2r-2} = \frac{\frac{1}{16r^2}}{1 - \frac{1}{4r^2}(d)} \quad (7.12)$$

Fazendo $r = 6$ em (7.12) obtem-se:

$$-v_{2r-2} = -v_{10} \cong \frac{\frac{1}{18}}{1 + \frac{10.6}{144}} = 0.052, \text{ onde o valor médio entre o valor}$$

tentativa ($d = -10$) e o valor encontrado ($d = -11.2$) para d_0 é -10.6.

Para $r = 5$;

$$r|_5 = \frac{\frac{1}{100}}{1 + \frac{10.6}{100}} = 0.009040$$

Para $r = 4$

$$r|_4 = \frac{\frac{1}{36}}{1 + \frac{10.6}{64}} - 0.009040 = 0.024020$$

Para $r = 3$

$$r|_3 = \frac{\frac{1}{9}}{1 + \frac{10.6}{36}} - 0.024020 = 0.087460$$

Para $r = 2$

$$r|_2 = \frac{\frac{1}{4}}{1 + \frac{10.6}{16}} - 0.087460 = 0.63490$$

Para $r = 1$

$$r|_1 = \frac{-32}{1 + \frac{10.6}{4}} - 0.63490 = 10.613260 = -d_0.$$

A precisão dos resultados poderá ser melhor obtida se for realizada a média entre os valores encontrados para cada aproximação. Expandindo o resultado para $r = 7$ o novo valor para d_0 será:

$d_0 = -10.60672$, que continua sendo uma aproximação.

2 - Computação dos coeficientes.

A obtenção dos coeficientes para $Ce_0(8, \theta)$ será a partir dos valores:

a) $v_{10} \cong -0.052$

b) $d_0 \cong -10.6$

$$v_8 = -\frac{D_{10}}{D_8} = \frac{\frac{2}{25}}{\left[1 + \frac{10.6}{100} - \frac{2(0.052)}{25}\right]} \cong 0.0726$$

$$V_6 = -\frac{D_8}{D_6} = \frac{\frac{2}{16}}{\left[1 + \frac{10.6}{64} - \frac{2(0.0726)}{16}\right]} \cong 0.108$$

$$-V_4 = -\frac{D_6}{D_4} = \frac{\frac{2}{9}}{\left[1 + \frac{10.6}{36} - \frac{2(0.108)}{9}\right]} \cong 0.175$$

$$-V_2 = -\frac{D_4}{D_2} = \frac{\frac{2}{4}}{\left[1 + \frac{10.6}{16} - \frac{2(0.175)}{4}\right]} \cong 0.318$$

$$-V_0 = \frac{D_2}{D_0} = \frac{4}{\left[1 + \frac{10.6}{4} - 2(0.318)\right]} \cong 1.327$$

Normalizando a função de acordo com [17], tem-se:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \text{Ce}_m^2(h, \theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \text{Se}_m^2(h, \theta) d\theta = 1 \quad (7.13)$$

$$2[D_0^{2n}]^2 = \sum_{r=1}^{\infty} [D_{2r}^{2n}]^2 = 1$$

$$1 = 2D_0^2 + D_2^2 + D_4^2 + D_6^2 + D_8^2 + \dots$$

$$\frac{1}{D_0^2} = 2 + \left(\frac{D_2}{D_0}\right)^2 + \left(\frac{D_4}{D_2}\right)^2 + \left(\frac{D_6}{D_4}\right)^2 + \left(\frac{D_8}{D_6}\right)^2 + \dots \quad (7.14)$$

Usando a relação obtida para; $-\frac{D_2}{D_0} = 1.327$, obtem-se os demais valores para os coeficientes. Atraves dos valores dos coeficientes normalizados pode-se escrever a expressão mais aproximada para a função teste.

A função (15) de Mathieu periódica.

$$y'' + (10.6 \dots - 16 \cos 2\theta)y = 0 \quad (7.15)$$

Terá a primeira solução aproximada sob a forma:

$$Ce(\theta, 8) = 0.504 - 0.668 \cos 2\theta + 0.212 \cos 4\theta - 0.037 \cos 6\theta + 0.004 \cos 8\theta - 0.0003 \cos 10\theta \quad (7.16)$$

Substituindo a solução na expressão de Mathieu periódica (7.15) obtem-se:

$$y''(n\pi) = (16 + 10,6\dots)y(n\pi)$$

$$Ce''_0(n\pi, 8) = 4 \times 0.668 - 16 \times 0.22 + 36 \times 0.037 - 64 \times 0.004 + 100 \times 0.0003 = 0.388 \quad (7.17)$$

$$(10.6\dots + 16)Ce_0(n\pi) = 26.6\dots(0.504 + 0.668 + 0.212 - 0.037 + 0.004 - 0.0003) = 0.391 \quad (7.18)$$

O erro entre a expressão (17) e a expressão (18) é menor que 1%.

2-Comportamento das funções de Mathieu de acordo com o número de termos.

Os resultados apresentados, a seguir, foram obtidos através da formulação matemática e gerados pelo software MATHCAD 5.0, contendo o número de termos apresentados no quadro 1. A partir deste primeiro quadro as demais funções seguiram o mesmo critério em relação ao número de termos escolhidos.

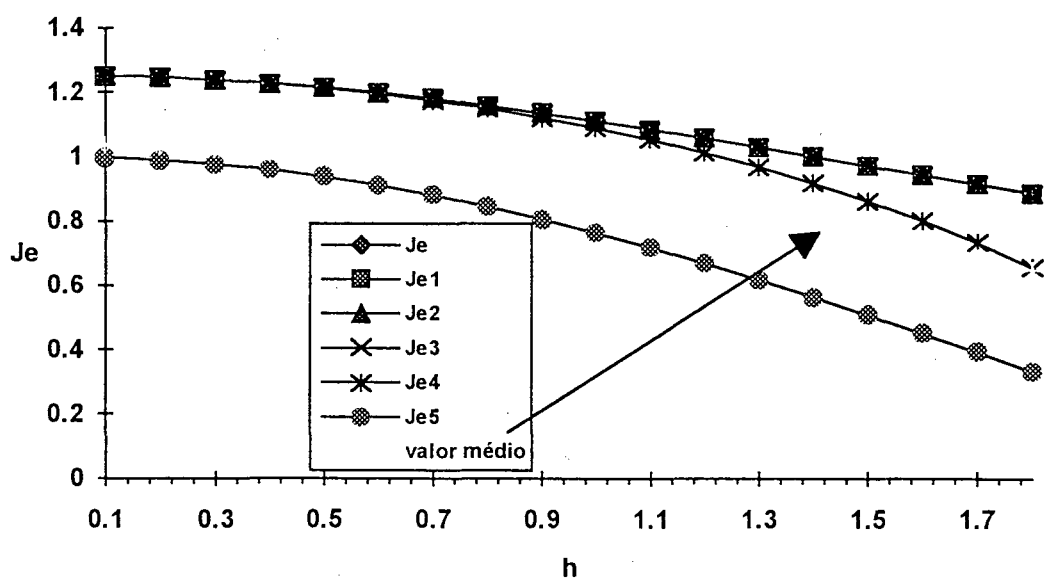
Função	Je	Je1	Je2	Je3	Je4	Je5
N. de termos	todos	5	4	3	2	1

Quadro 1: Função de Mathieu e o número de termos utilizados

a - Função de Mathieu primeiro tipo de ordem zero.

h	Je	Je1	Je2	Je3	Je4	Je5	Média
0.1	1.252	1.252	1.252	1.252	1.252	0.9975	1.03678571
0.2	1.247	1.247	1.247	1.247	1.247	0.9899	1.03212857
0.3	1.239	1.239	1.239	1.239	1.239	0.9774	1.02462857
0.4	1.228	1.228	1.228	1.228	1.228	0.96	1.01428571
0.5	1.214	1.214	1.214	1.214	1.213	0.9379	1.00098571
0.6	1.198	1.198	1.198	1.198	1.195	0.9111	0.98544286
0.7	1.179	1.179	1.179	1.179	1.174	0.88	0.96714286
0.8	1.158	1.158	1.158	1.158	1.15	0.8448	0.94668571
0.9	1.135	1.135	1.135	1.135	1.121	0.8057	0.92381429
1	1.11	1.11	1.11	1.11	1.089	0.763	0.89885714
1.1	1.084	1.084	1.084	1.084	1.053	0.717	0.87228571
1.2	1.057	1.057	1.057	1.057	1.013	0.6681	0.84415714
1.3	1.029	1.029	1.029	1.029	0.9685	0.6167	0.81445714
1.4	1	1	1	1	0.9186	0.5631	0.7831
1.5	0.9716	0.9716	0.9716	0.9714	0.8631	0.5076	0.75098571
1.6	0.9432	0.9432	0.9432	0.9428	0.8015	0.4508	0.71781429
1.7	0.9151	0.9151	0.9151	0.9146	0.733	0.3931	0.68371429
1.8	0.8876	0.8876	0.8876	0.8868	0.6569	0.3347	0.64874286

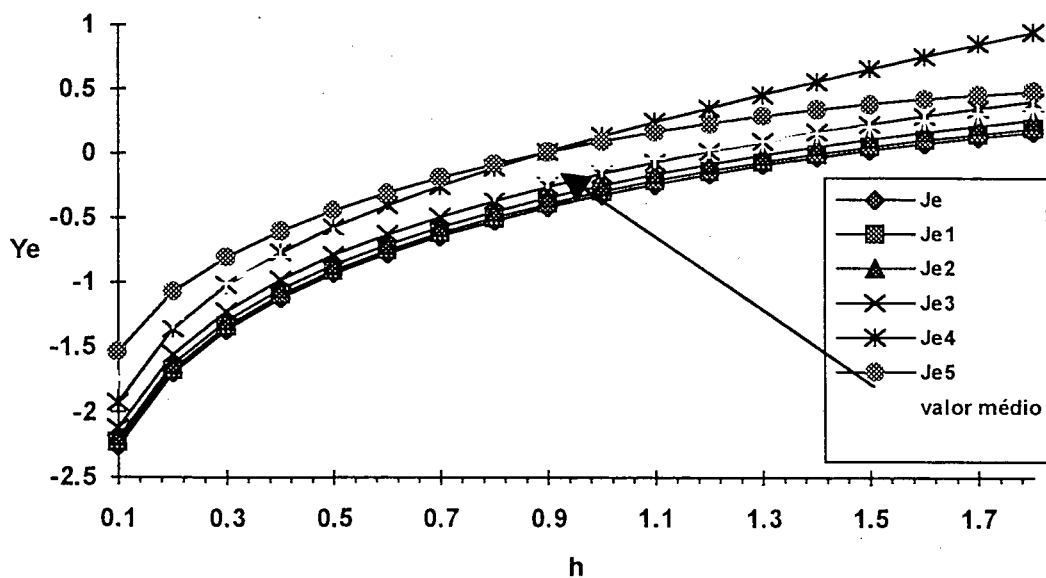
Função de Mathieu de primeiro tipo ordem zero (número de termos)



b - Função de Mathieu segundo tipo de ordem zero.

h	Je	Je1	Je2	Je3	Je4	Je5	valor médio
0.1	-2.26	-2.233	-2.193	-2.119	-1.921	-1.531	-1.751
0.2	-1.699	-1.673	-1.632	-1.558	-1.358	-1.078	-
0.3	-1.365	-1.339	-1.298	-1.223	-1.019	-0.8038	-
0.4	-1.124	-1.098	-1.056	-0.9806	-0.7704	-0.6025	-0.8045
0.5	-0.9339	-0.9075	-0.8653	-0.7881	-0.5703	-0.4408	-0.6437
0.6	-0.7759	-0.7493	-0.7064	-0.6274	-0.3998	-0.3047	-
0.7	-0.6406	-0.6139	-0.57	-0.4888	-0.2493	-0.1868	-
0.8	-0.5223	-0.4955	-0.4505	-0.3667	-0.1128	-0.0829	-0.2901
0.9	-0.4176	-0.3906	-0.3444	-0.2576	0.01329	0.00955	-
1	-0.3241	-0.2969	-0.2491	-0.1588	0.1316	0.09216	1 0.19819414
1.1	-0.2399	-0.2125	-0.1632	-0.06883	0.2439	0.166	-
1.2	-0.164	-0.1364	-0.08517	0.01378	0.3515	0.2318	0.03921857
1.3	-0.0953	-0.06744	-0.01419	0.09004	0.4556	0.2901	0.03021571
1.4	-0.03308	-0.004943	0.05056	0.1608	0.5567	0.3412	0.09411571
1.5	0.02334	0.05177	0.1098	0.2269	0.6555	0.3855	0.15303386
1.6	0.0745	0.1033	0.164	0.2889	0.7523	0.4232	0.20754429
1.7	0.1209	0.15	0.2137	0.3475	0.8474	0.4544	0.25802857
1.8	0.1631	0.1926	0.2595	0.4034	0.9408	0.4794	0.30484286
							0.3484

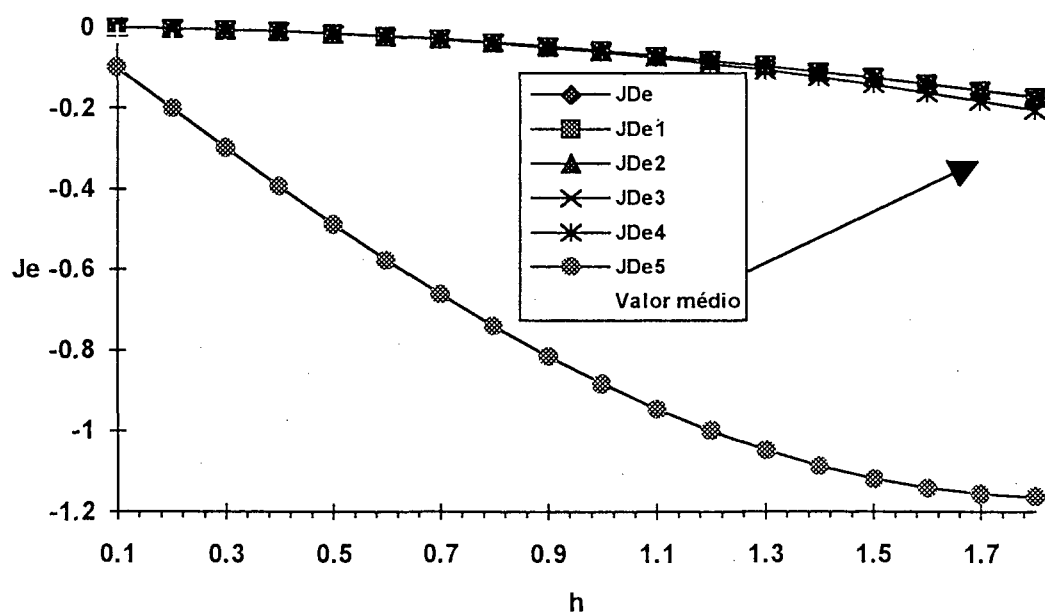
Função Mathieu de segundo tipo de ordem zero (número de termos)



c - Função derivada de Mathieu primeiro tipo de ordem zero.

h	JDe	JDe1	JDe2	JDe3	JDe4	JDe5	Valor médio
0.1	-0.00063	-0.00063	-0.00063	-0.00063	-0.0006	-0.1004	-0.01725873
0.2	-0.002517	-0.00252	-0.00252	-0.00252	-0.0025	-0.2	-0.03543183
0.3	-0.005645	-0.00565	-0.00565	-0.00565	-0.0057	-0.2981	-0.05439283
0.4	-0.009992	-0.00999	-0.00999	-0.00999	-0.0101	-0.3939	-0.073993
0.5	-0.01553	-0.01553	-0.01553	-0.01553	-0.0158	-0.4868	-0.094115
0.6	-0.02221	-0.02221	-0.02221	-0.02221	-0.0227	-0.576	-0.11459167
0.7	-0.02999	-0.02999	-0.02999	-0.02999	-0.0309	-0.6609	-0.135295
0.8	-0.03882	-0.03882	-0.03882	-0.03882	-0.0404	-0.7408	-0.15607833
0.9	-0.04865	-0.04865	-0.04865	-0.04865	-0.0511	-0.8151	-0.17680667
1	-0.05942	-0.05942	-0.05942	-0.05942	-0.0632	-0.8833	-0.19735833
1.1	-0.07107	-0.07107	-0.07107	-0.07108	-0.0765	-0.945	-0.21763
1.2	-0.08355	-0.08355	-0.08355	-0.08356	-0.0911	-0.9996	-0.23748667
1.3	-0.09681	-0.09681	-0.09681	-0.09683	-0.107	-1.047	-0.25687667
1.4	-0.1108	-0.1108	-0.1108	-0.1108	-0.1243	-1.086	-0.27558333
1.5	-0.1254	-0.1254	-0.1254	-0.1255	-0.1428	-1.118	-0.29375
1.6	-0.1407	-0.1407	-0.1407	-0.1409	-0.1626	-1.141	-0.3111
1.7	-0.1566	-0.1566	-0.1566	-0.1568	-0.1836	-1.156	-0.3277
1.8	-0.1731	-0.1731	-0.1731	-0.1734	-0.2058	-1.163	-0.34358333

Função derivada de Mathieu de primeiro tipo (número de termos)



d - Função derivada de Mathieu segundo tipo de ordem zero.

h	YDe	YDe1	YDe2	YDe3	YDe4	YDe5	Valor médio
0.1	0.1945	0.1736	0.1495	0.1202	0.0808	12.86	2.26309833
0.2	0.1977	0.1767	0.1525	0.123	0.0835	6.617	1.22506333
0.3	0.2018	0.1809	0.1564	0.1267	0.087	4.566	0.88646
0.4	0.2067	0.1857	0.161	0.1309	0.0909	3.546	0.72019333
0.5	0.212	0.1909	0.1659	0.1354	0.0949	2.931	0.62168833
0.6	0.2175	0.1964	0.1709	0.1399	0.099	2.51	0.55561
0.7	0.2231	0.2019	0.1759	0.1442	0.1028	2.197	0.50748333
0.8	0.2287	0.2074	0.1808	0.1483	0.1062	1.947	0.46973333
0.9	0.234	0.2127	0.1854	0.152	0.109	1.737	0.43835
1	0.2391	0.2177	0.1896	0.1552	0.1111	1.554	0.41111667
1.1	0.2439	0.2223	0.1934	0.1578	0.1123	1.387	0.38611667
1.2	0.2483	0.2265	0.1967	0.1598	0.1124	1.233	0.36278333
1.3	0.2521	0.2303	0.1994	0.161	0.1112	1.088	0.34033333
1.4	0.2555	0.2335	0.2014	0.1615	0.1085	0.9488	0.3182
1.5	0.2584	0.2362	0.2029	0.1612	0.1041	0.8148	0.29626667
1.6	0.2607	0.2383	0.2036	0.16	0.0976	0.685	0.27419667
1.7	0.2625	0.2399	0.2037	0.158	0.0887	0.5589	0.25195667
1.8	0.2636	0.2408	0.2031	0.155	0.0772	0.4365	0.22937

Função derivada de Mathieu segundo tipo ordem zero (número de termos)

